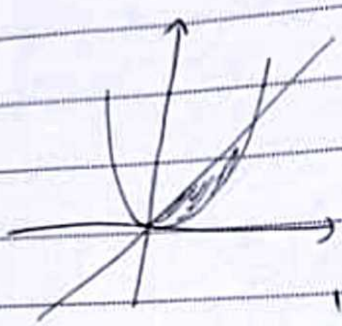
۵- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_D xy\,dA$ که در آن D ناحیه واقع در ربع اول و محدود به خم $y=x^2$ و خط $y=x$ باشد.

حل



$$\iint_D xy\,dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x} xy\,dA = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{x} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left. \frac{xy^2}{2}\right)_{y=x^2}^{x} dx = \int_{x=0}^{1} x\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx = \left.\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{12}\right)_{x=0}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)-(0-0) = \frac{3-2}{24} = \frac{1}{24}$$

1

۱ دامنه تابع $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y)=\sqrt{x^2-y}$ را بیابید.

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,;\, x^2-y\geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,;\, x^2\geq y\}$$

۲ نشان دهید تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}\\ 0\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ حد ندارد.

حل دو مسیر در نظر می‌گیریم

$$y=2x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x+2x}{x-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{-x} = -3$$

$$y=3x \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x+3x}{x-3x} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{-2x} = -2$$

$-2 \neq -3$ پس تابع حد ندارد.

۳ مشتقات جزئی تابع $f(x,y)=3xy^2-e^{x}y$ را حساب کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 - ye^{x} \,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - e^{x}$$

۴ بردار گرادیان $f(x,y)=x^2+y^2$ را در نقطه $(1,1)$ بدست آورید.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x,2y)\Big|_{(1,1)} = (2,2).$$