جزوه درس :

تحلیل سازه

استاد :

نسترن اصلان فعال

"بسم الله الرحمن الرحيم"

فهرست مطالب:

۱) معرفی و تشخیص سازه‌ها
۲) نیروهای داخلی و رسم نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی
میان ترم اول (خیلی خوب بخش)
۳) خرپاها
۴) خط تأثیر
میان ترم دوم (خواب می‌کشد)
۵) تغییر شکل سازه‌ها
۶) تحلیل سازه‌های نامعین
پایان ترم (متوسط)

امتیازات:

۱) حل تمرین و کلاس حل تمرین — استاد حل تمرین: امیر اصیلی
۲) امتحان میان ترم اول
۳) امتحان میان ترم دوم
۴) امتحان پایان ترم

توجه: در هر کدام امتحان‌ها، مرتب بودن و تمیزی برگه ۵ نمره از ۱۰۰ نمره را دارا می‌باشد.

مآخذ:

۱) در زمینه کتب انگلیسی، کتاب‌هایی با عناوین زیر مفید هستند:

1) Theory of structures 2) Structural analysis 3) Analysis of structures

مخصوص کتب:

4) Norris & Wilbur
5) Hillberg Burg (کتاب جدیدی است)

۲) جزوه کلاسی
۳) کتاب تحلیل سازه‌ها (ابل‌آبادی - طاحونی)

— مبحث مربوط به جرم اصحب ... برای امتحان بعدی حذف خواهد شد.

فصل اول

حمید کاظم

"بسم الله الرحمن الرحیم"

کلیات، تشخیص سازه‌ها

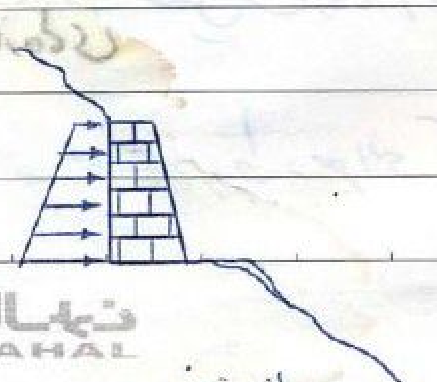
تعریف سازه: عضو یا مجموعه‌ای از اعضا می‌باشد که برای تحمل یا انتقال نیرو به کار می‌رود. کلمه فارسی سازه معادلی است که در مقابل structure به کار برده می‌شود.

طبقه‌بندی سازه‌ها: سازه‌ها را می‌توان با روش‌های مختلفی طبقه‌بندی کرد. ما دنبال طبقه‌بندی هندسی یا مهندسی هستیم. در این درس سازه‌ها را به شکل زیر طبقه‌بندی می‌کنیم

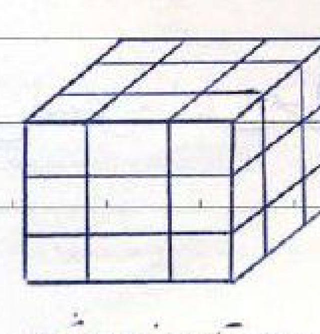
۱) سازه‌های وزنی (gravity structures): سازه‌هایی هستند که عامل پایداری آن‌ها در مقابل بار قائم وزن آن‌هاست.

۲) سازه‌های قاب‌بندی شده (framed structures): سازه‌های قاب‌بندی شده مجموعه‌ای از تیرها، ستون‌ها، اعضای محوری، خمشی و غیره هستند که تشکیل حجم مشخصی می‌دهند که عامل پایداری آن‌ها در مقابل بارهای خارجی نه تنها وزن بلکه در حالت غالب هندسه آن‌هاست. یعنی با دادن هندسه مناسب به مجموعه پایداری آن‌ها افزایش می‌یابد. اکثر ذهنیت ما از سازه، سازه‌های قاب‌بندی شده است. ساختمان‌های مسکونی، اداری، پل‌ها، بادبند، علائم، سازه‌های هوایی و ... در رده سازه‌های قاب‌بندی شده‌اند. تمرکز اصلی تحلیل سازه‌های ۱ و ۲ سازه‌های قاب‌بندی شده است.

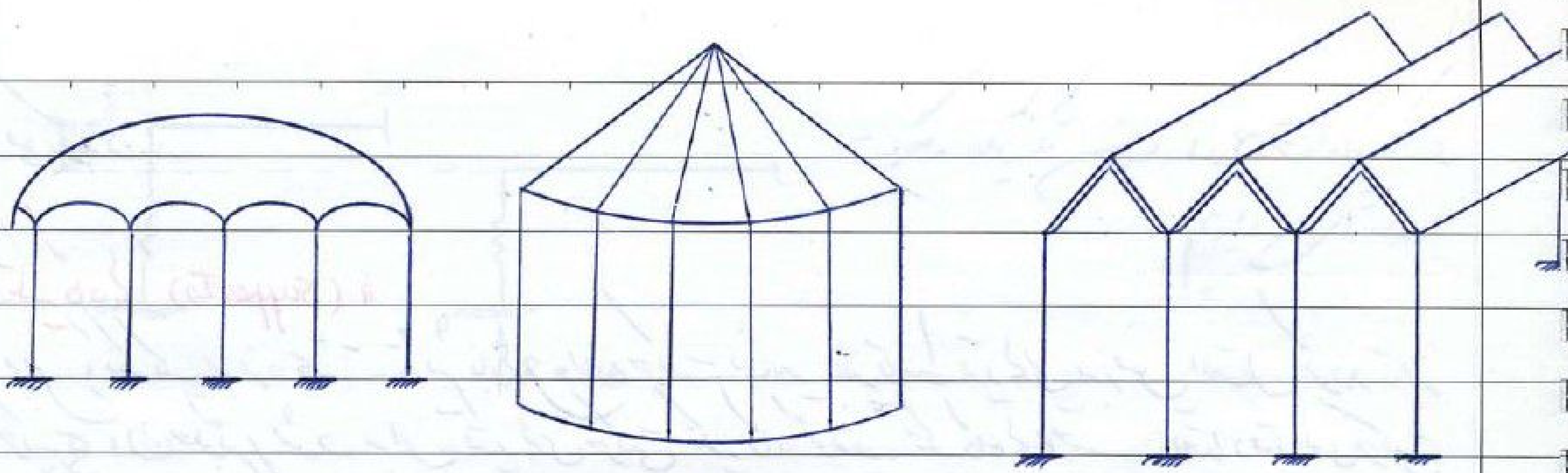
۳) سازه‌های پوسته‌ای (shell structures): عامل غالب در پایداری سازه‌های پوسته‌ای، هندسه آن‌ها می‌باشد. وجه تمایزی که این سازه‌ها با سازه‌های قاب‌بندی شده دارند این است که سازه‌های پوسته‌ای معمولاً از ورق و یا محیط‌های یکپارچه‌ای هستند که به آن هندسه خاصی داده شده است. لوله‌ها، پوشش‌های زین اسبی، ورق‌های تاشده، پوسته‌های استوانه‌ای و کروی از انواع سازه‌های پوسته‌ای هستند. تحلیل این گونه سازه‌ها که دارای کاربردهای صنعتی و یا معماری هستند، معمولاً در دروس اصلی تحلیل صفحه‌ها و پوسته‌ها مورد توجه قرار می‌گیرند.



سازه وزنی



سازه قاب‌بندی شده



سازه‌های پوسته‌ای

علم تحلیل سازه: علمی است که در آن رفتار سازه از نقطه‌ای که بار به آن اعمال می‌گردد تا لحظه‌ای که بار به تکیه‌گاه‌ها منتقل می‌گردد مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

هدف از تحلیل سازه: وقتی که سازه‌ای را مورد تحلیل قرار می‌دهیم به دنبال اهداف زیر می‌باشیم.

۱) بررسی پایداری، ناپایداری، معین و نامعین

۲) تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی

۳) تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودار آن‌ها

۴) محاسبه تغییر شکل سازه

سازه‌های فضایی (سه بعدی) و سازه‌های صفحه‌ای (دوبعدی):

سازه‌های فضایی: همه سازه‌ها سه بعدی هستند. یعنی حجمی از فضا را اشغال کرده و در اختیار بهره‌بردار قرار می‌دهند. دسته بسیار بزرگی از سازه‌های سه بعدی از نقطه نظر تحلیل قابل تبدیل به مجموعه‌ای از سازه‌های دوبعدی هستند، یعنی می‌توان آن‌ها را با توجه به اطلاعات مربوط به سازه‌های دوبعدی تحلیل نمود. دسته دیگر از سازه‌های فضایی وجود دارند که رفتار آن‌ها قابل تجزیه به رفتار دوبعدی نیست و حتماً باید سه بعدی بررسی شود. به این دسته سازه‌ها، سازه‌های فضاکار گویند. پوسته‌ها دسته بسیار مهمی از سازه‌های فضاکار هستند.

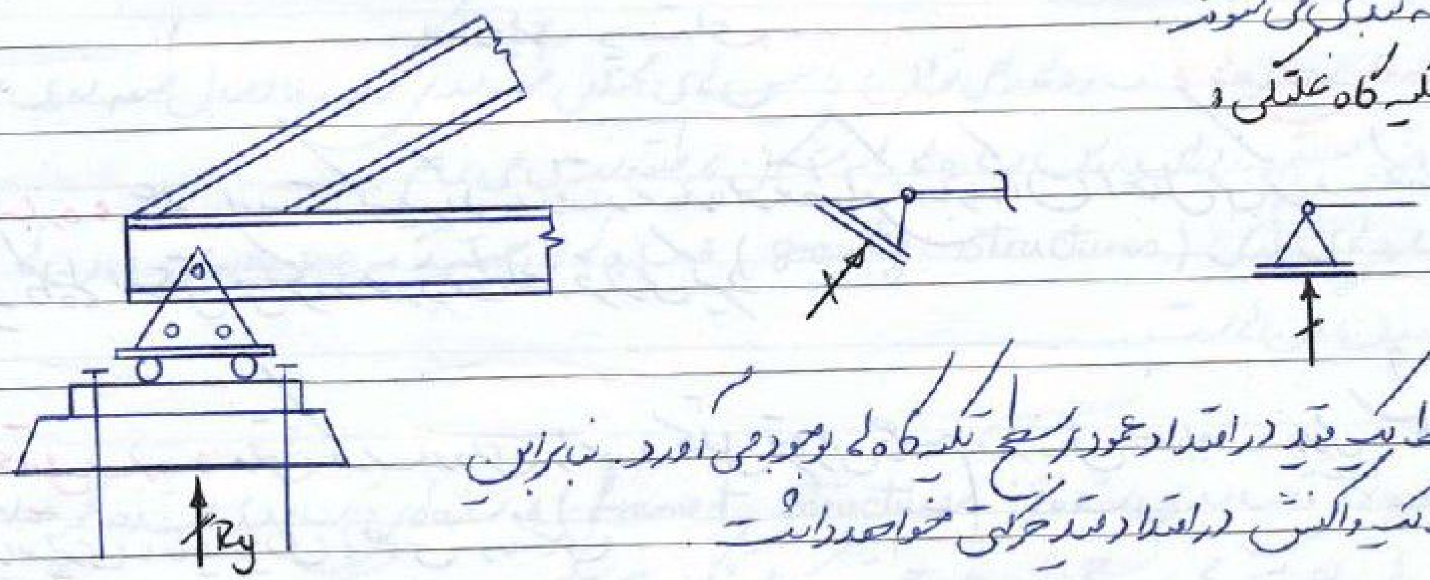
سازه‌های صفحه‌ای: سازه‌هایی می‌باشند که در آن سازه و بارهای وارد بر آن همگی در یک صفحه قرار دارند. درس تحلیل سازه‌های ۱ اختصاص به سازه‌های قاب‌بندی شده صفحه‌ای دارد. تجربه نشان می‌دهد که اکثر سازه‌های فضایی قابل تحلیل به صورت دوبعدی می‌باشند. وجود بعد سوم در سازه‌های فضایی اصول و روش‌های کار را تغییر نمی‌دهد و فقط به علت وجود بعد سوم عملیات قدری پرحجم و پیچیده

می گردد.

تکیه گاه‌ها (Supports):

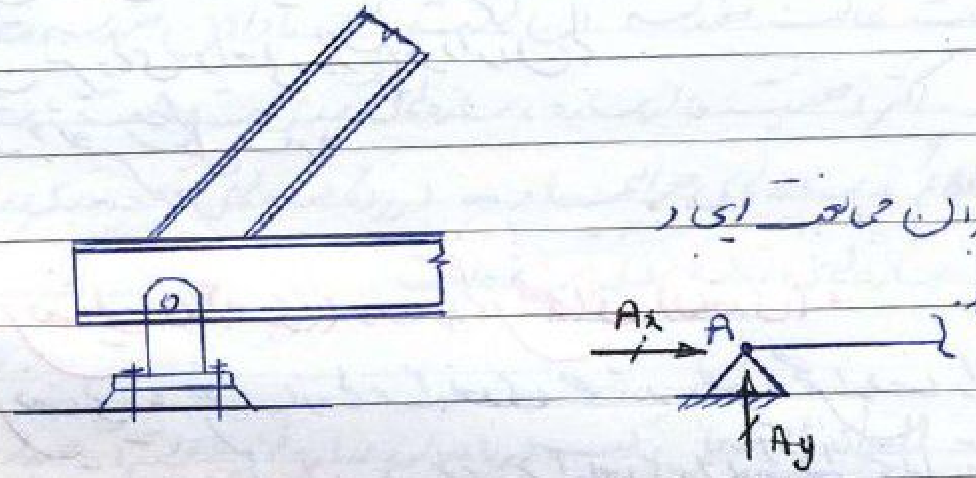
برای اینکه یک سازه تحت تأثیر بارهای وارده حرکت ننماید باید توسط قیدهایی به زمین اتصال گردد تا از حرکت آن جلوگیری شود. به این قیدهای حرکتی تکیه گاه گویند. تکیه گاه‌ها برحسب تعداد قیدهای حرکتی طبقه بندی می شوند.

۱) تکیه گاه غلتکی:



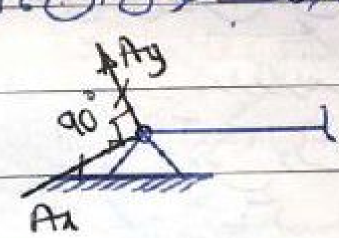
فقط یک قید در امتداد عمود بر سطح تکیه گاه‌ها به وجود می آورد. بنابراین فقط یک واکنش در امتداد قید حرکتی خواهد داشت.

۲) تکیه گاه مفصلی:

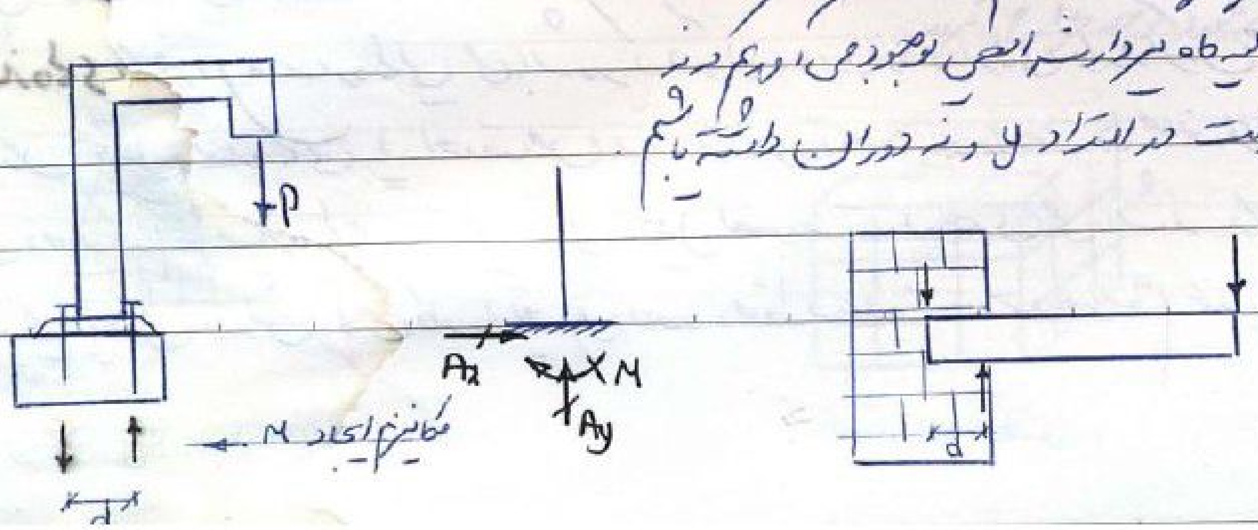


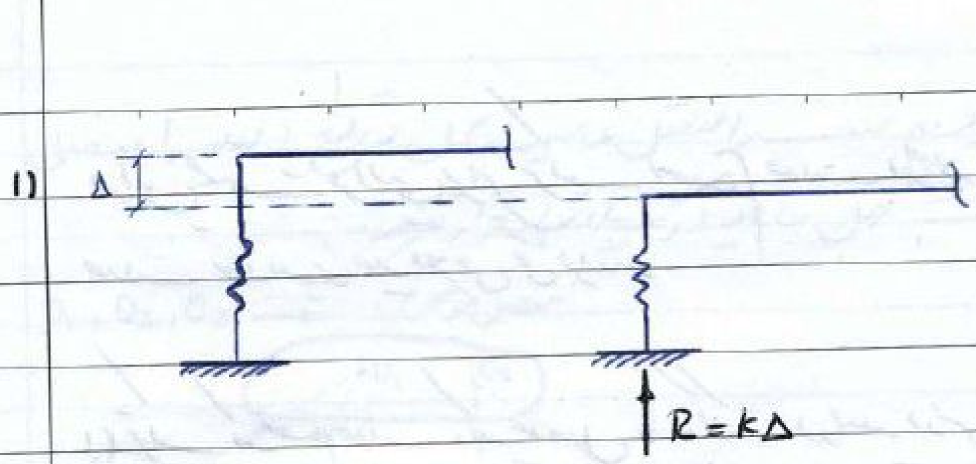
* هر تکیه گاهی در هر امتدادی که در برابر آن مقاومت کند باعث ایجاد واکنش می شود.

در تکیه گاه مفصلی واکنش‌های Ay و Ax که الزاماً باید بر هم عمود باشند اما جهت عمومی آنها می تواند طبق سهولت حل مسئله در نظر گرفته شود.

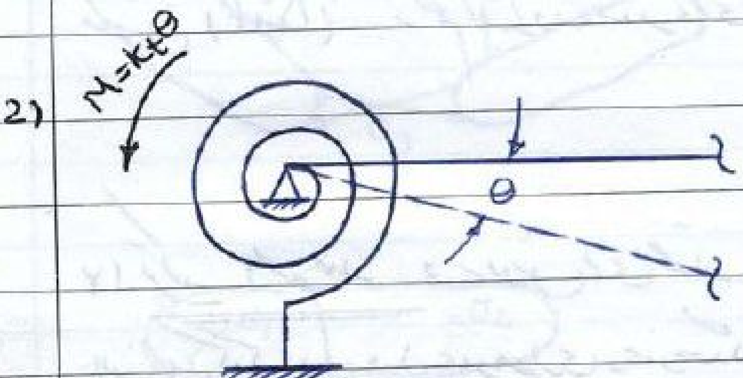


۳) تکیه گاه گیردار: در تکیه گاه گیردار انواع قید به وجود می آوریم نه حرکت در امتداد x و نه حرکت در امتداد y و نه دوران داشته باشیم.

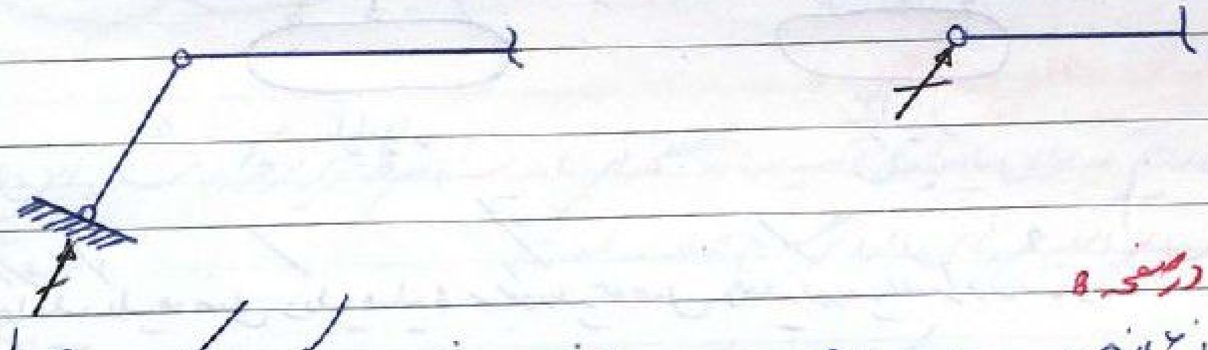




۴) تکیه‌گاه ارتجاعی: در این تکیه‌گاه ما حرکت در راستای فنر داریم.



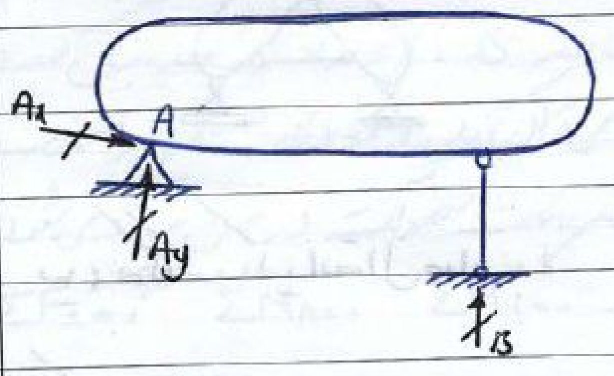
۵) تکیه‌گاه رابط یا میله‌ای (Link): یک عضو دو سر مفصل است که می‌تواند در امتداد محورش تولید واکنش کند.



پایداری جسم صلب در صفحه:

هدف تعیین حداقل مولفه لازم برای پایداری این جسم صلب در صفحه می‌باشد (جلوگیری از حرکت در اثر نیرو)

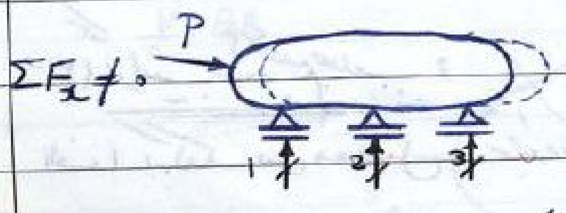
حداقل مولفه‌های لازم برای پایداری جسم صلب در صفحه وجود ۳ عدد مولفه می‌باشد. مشروط بر اینکه:

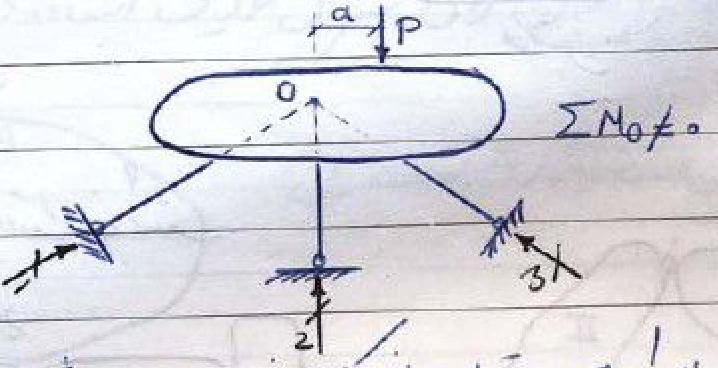


۱) سه مولفه با هم موازی نباشند.

۲) سه مولفه از یک نقطه همگرا نباشند.

ناپایداری هندسی





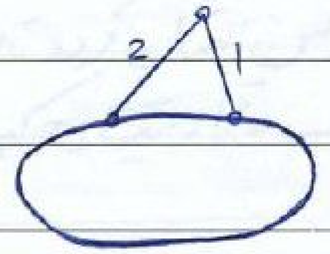
اگر ناپایداری به واسطه وجود تعداد مولفه کمتر از ۳ عدد باشد ناپایداری استاتیکی نام دارد.

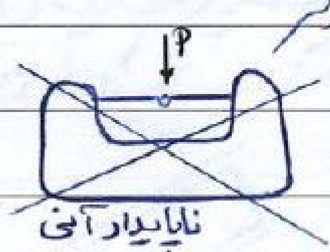
* وقتی جسم صلب پایدار است یعنی بر اثر اعمال نیرو جسم تعادل خود را حفظ می‌کند.

قوانین ترکیب اجسام صلب در صفحه:

در این قسمت قوانینی برای ترکیب اجسام صلب در صفحه با حداقل میله‌های لازم بطوریکه ایجاد یک جسم صلب جدید نمایند معرفی می‌گردند.

۱) ترکیب یک جسم صلب و یک مفصل: به کمک دو میله دو سر مفصل (link) که هم امتداد نباشند، انجام داد.

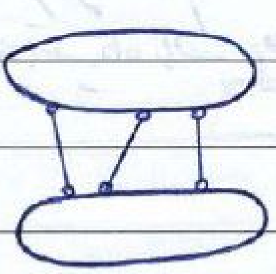


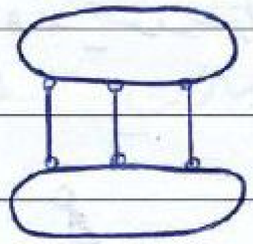


ناپایدار آنی

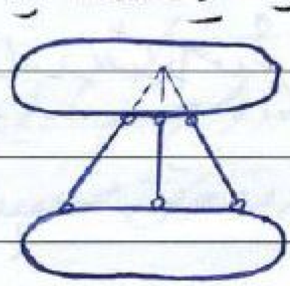
۲) ترکیب دو جسم صلب: به روش‌های مختلف می‌توان این ترکیب را انجام داد.

الف) به کمک سه میله غیر موازی و غیر همگرا:



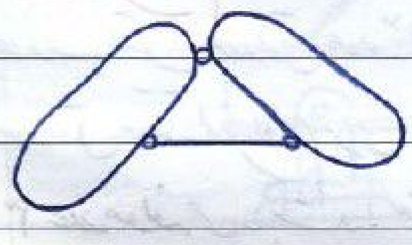


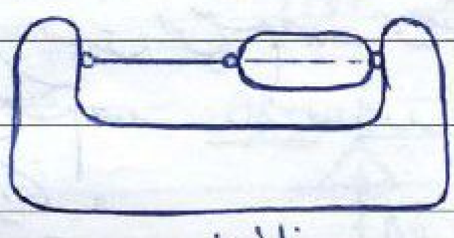
ناپایدار



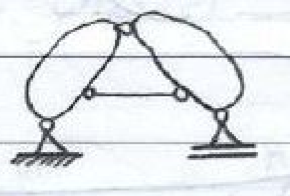
ناپایدار

ب) به کمک یک مفصل و یک میله: به طوریکه مفصل و میله در یک امتداد نباشند.

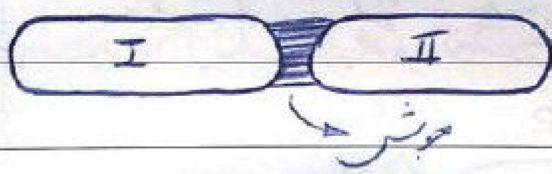




ناپایدار

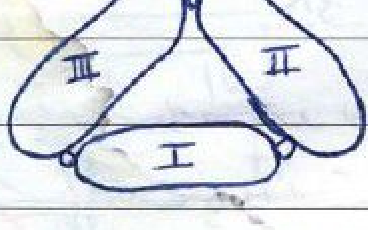


پ) به کمک یک اتصال صلب:

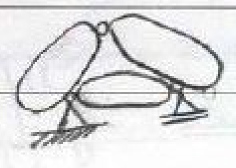


۳) ترکیب سه جسم صلب:

الف) به کمک سه مفصل: به طوریکه در یک امتداد نباشند.

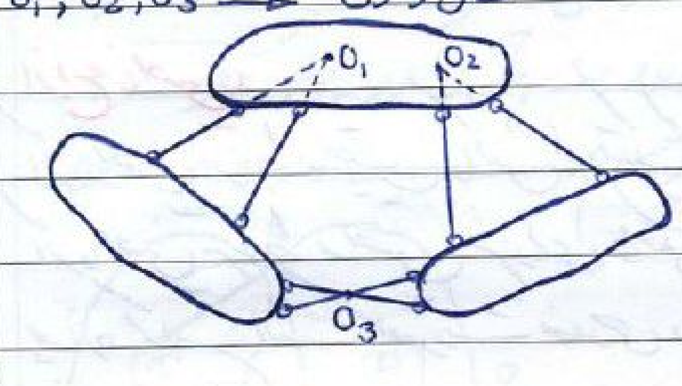


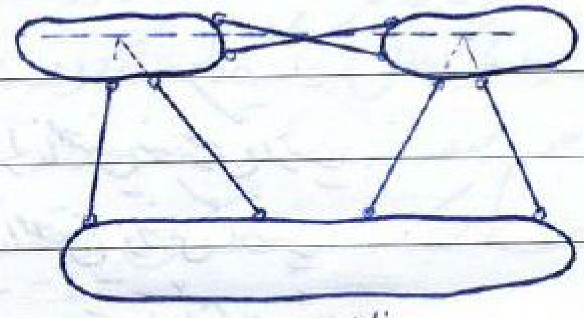
ناپایدار



ب) به کمک شش میله: به طوری که هر دو میله دو جسم صلب را متصل به هم نمایند. محل تقاطع دو میله را مفصل موهومی گویند. مفاصل موهومی هم تحت حالت فوق نباید در یک امتداد قرار گیرند.

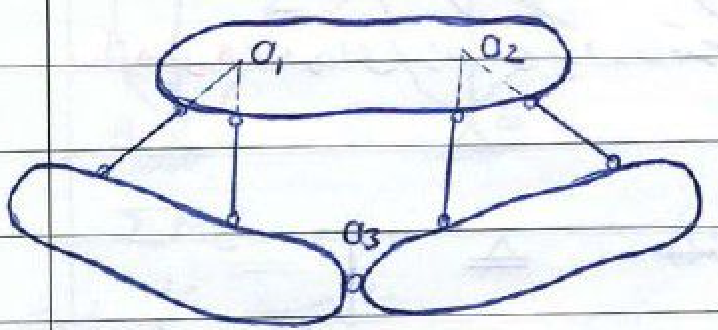
$O_1 , O_2 , O_3 \rightarrow$ مفصل موهومی





ناپایدار

ج) به کمک ترکیبی از مفصل و میله: به طوری که مفصل های واقعی و موهومی در یک امتداد قرار نگیرند.



معادلات تعادل استاتیکی معین و نامعین:

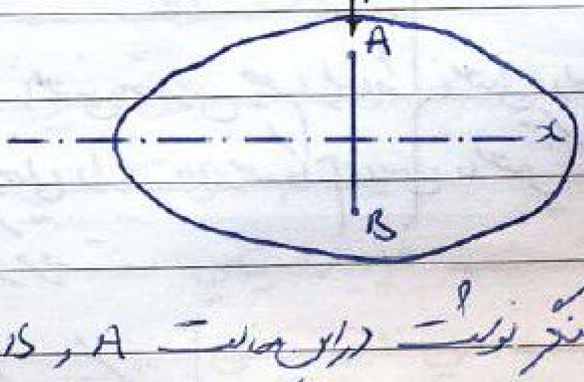
از درس استاتیک می دانیم که برای پایداری یک سازه صفحه ای باید سه شرط زیر برقرار باشد. این سه شرط در واقع شرط صفر بودن برآیند نیروهای وارد بر جسم صلب است.

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases}$$

به معادلات فوق معادلات تعادل در صفحه گفته می شود که تعداد آنها برابر با سه می باشد. نوشتن معادله لنگر نسبت به نقطه دلخواهی مانند C، از این معادله جدیدی نشده و معادله بدست آمده ترکیب خطی از سه معادله قبلی است. اما می توان یکی از معادلات نیرو را حذف کرد و به جای آن معادله لنگر نسبت به نقطه جدید نوشت. این امر باعث تسهیلات در حل مسئله می شود.

$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0$ و یا از معادله چهارم می توان برای کنترل عملیات استفاده کرد.

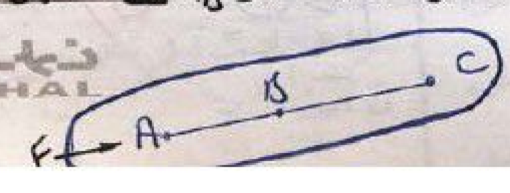
$x \not\perp AB$



در شکل مقابل سه شرط برقرار است ولی تعادل وجود ندارد.

می توان سه شرط را به صورت سه معادله لنگر نوشت. در این حالت A و B و C نباید روی یک امتداد واقع گردند.

$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0$

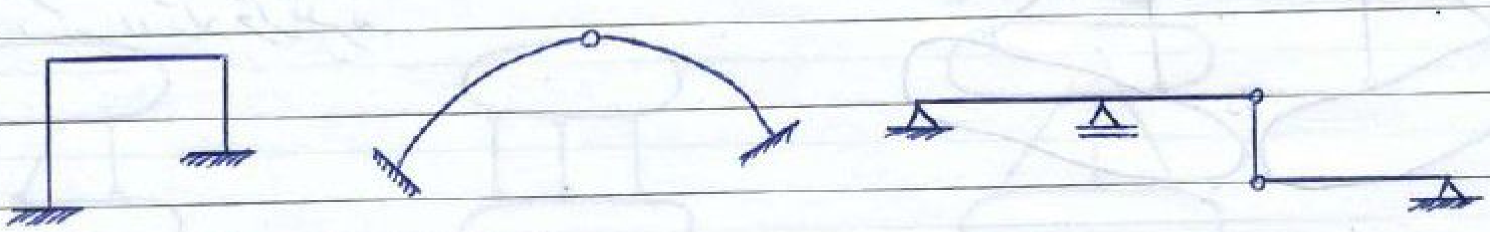


معین و نامعین: اگر بتوان کلیه واکنش های تکیه گاهی و نیروهای داخلی یک سازه را به کمک معادلات تعادل فوق تعیین نمود، در اینصورت سازه معین گفته می شود. در غیر اینصورت سازه نامعین است.

انواع نامعینی:

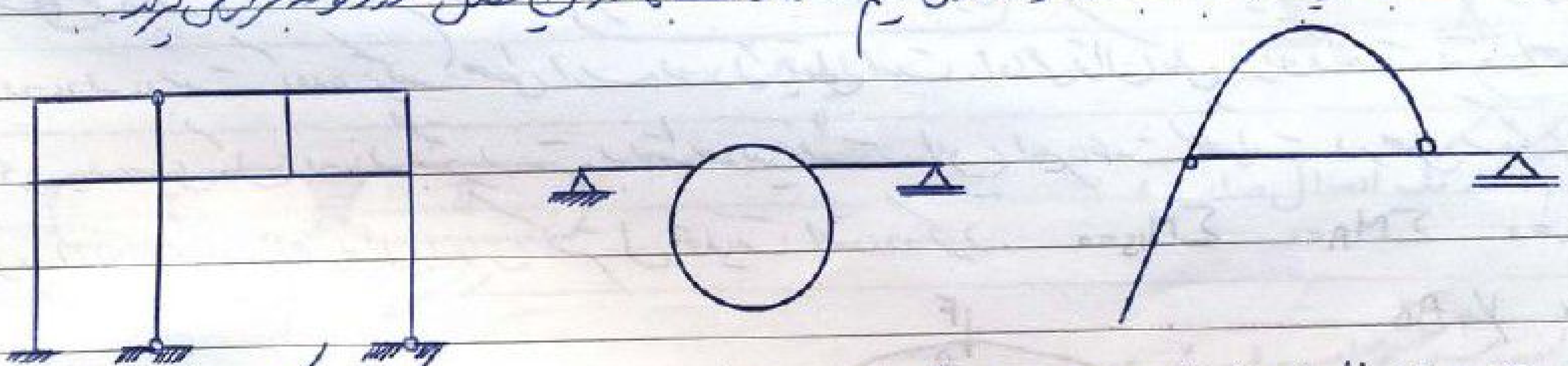
اگر نامعینی مربوط به تعیین واکنش های تکیه گاهی باشد آن را نامعینی خارجی گویند.
اگر نامعینی مربوط به تعیین نیروهای داخلی باشد آن را نامعینی داخلی گویند.
سازه ممکن است بصورت خارجی و داخلی نامعین بصورت توأم باشد.
از نظر نامعینی خارجی و داخلی سازه ها را در دو دسته باز و بسته طبقه بندی می نمایند.

سازه باز: سازه ای را باز گویند که فاقد هرگونه کادر یا حلقه باشد.

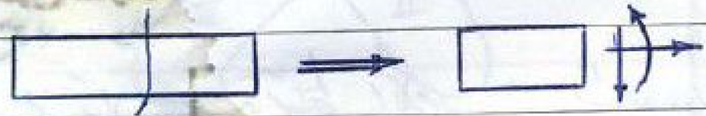


سازه های باز فقط از نظر خارجی بررسی می شوند و نامعینی داخلی برای آن ها مفهومی ندارد. یعنی اگر یک سازه باز از نظر خارجی معین باشد، از نظر نیروهای داخلی نیز معین است.

سازه بسته: سازه ای است که دارای یک یا چند حلقه یا کادر می باشد. خرپاها و قاب ها در این رده از سازه ها قرار دارند. بحث خرپاها را در مبحث خود دنبال می کنیم. قاب ها در این فصل مورد توجه قرار می گیرند.

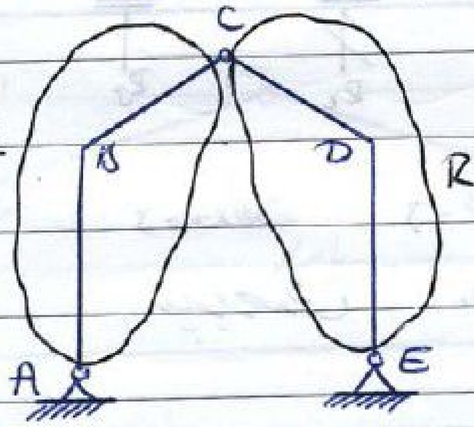


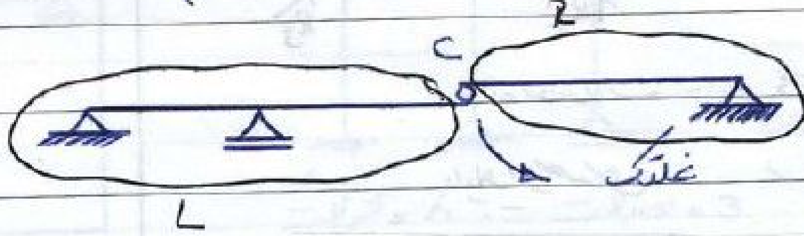
سازه بسته هم از لحاظ نامعینی خارجی و هم از لحاظ نامعینی داخلی باید مورد بررسی جداگانه قرار گیرد. هر کادر یا حلقه ۳ درجه نامعینی داخلی دارد. در هنگام بررسی نامعینی یک سازه بسته باید به تعداد هر کادر یا حلقه ۳ درجه نامعینی داخلی در نظر گرفت.


کادر:

روابط شرطی: بیان کردیم که تعداد معادلات تعادل استاتیکی ۳ عدد می باشد. در بعضی از سازه ها طراح

معمولاً شرایطی ایجاد می‌نمایند که یکی از نیروهای داخلی صفر گردد. این شرایط با جزئیات هایی در معادله تعادل مستقل همراه می‌باشند که باید به معادلات تعادل استاتیکی اضافه گردد. به این معادله، **شرطی** گویند. معادلات شرطی می‌توانند به علت وجود **مفصل داخلی** یا **غلتک داخلی** یا جزئیات مشابه باشند.
اگر قسمتی از سازه به طور کامل از تکیه‌گاه‌ها جدا گردد، می‌توان به وجود معادله شرطی پی برد، یعنی اگر سازه جدا شده حجم صلب باشد فاقد معادله شرطی است و اگر حجم صلب نباشد، دارای معادله شرطی خواهد بود که باید تعداد آن را تعیین گردید.



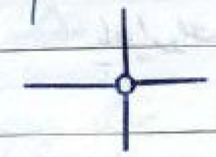


$\Sigma M_C = 0$ قطعه چپ یا قطعه راست

$\Sigma F_x = 0$ نقطه C

$\Sigma M_C = 0$ قطعه راست یا قطعه چپ

توجه: اگر m عضو در نقطه‌ای به یکدیگر **مفصل** گردند $m-1$ معادله شرطی وجود خواهیم داشت. معادله m ام از تعادل کل سازه به دست می‌آید.

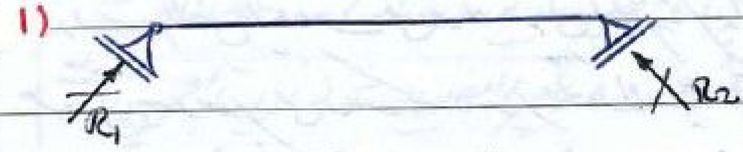

$\Rightarrow$ 3 معادله شرطی

تشخیص سازه:

تشخیص سازه به فرآیندی گویند که به کمک آن مشخص می‌گردد سازه پایدار یا ناپایدار، معین و یا نامعین است. درجه نامعینی سازه نیز در صورت لزوم تعیین می‌گردد. برای تشخیص سازه‌ها از روش جدولی استفاده می‌گردد.

- تشخیص سازه‌ها
  - سازه‌ی باز
    - ۱) ساده: (از یک قطعه تشکیل شده و فاقد معادله شرطی است)
      - کمتر از سه مجهول ← ناپایدار استاتیکی
      - تعداد مجهول = 3: معین
      - تعداد مجهول > 3: نامعین
      - (معین / نامعین) ← ناپایداری هندسی تدقیق گردد.
    - ۲) ترکیبی: تعداد روابط = تعداد شرطی + 3 (از ترکیب چند قطعه تشکیل شده و دارای معادله شرطی است)
      - روابط > مجهولات ← ناپایدار استاتیکی
      - روابط = مجهول: معین
      - روابط < مجهولات: نامعین
      - (معین / نامعین) ← ناپایداری هندسی تدقیق گردد
  - سازه‌ی بسته
    - روابط > مجهولات ← ناپایدار استاتیکی
    - روابط = مجهولات ← معین خارجی و داخلی
    - روابط < مجهولات
      - معین خارجی - نامعین داخلی
      - نامعین خارجی - معین داخلی
      - نامعین خارجی - نامعین داخلی
    - شرط لازم است لیکن کافی نیست. پایداری تدقیق شود.

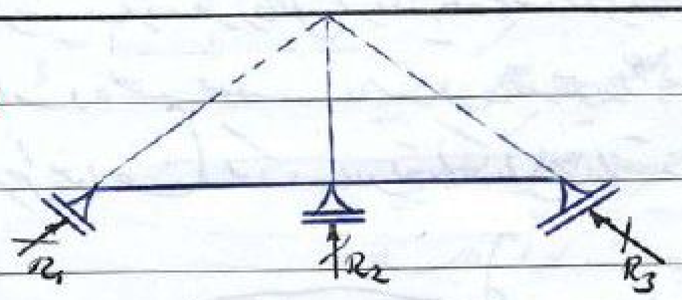
مثال:

1) 

معادلات = 3 ، مجهول = 2

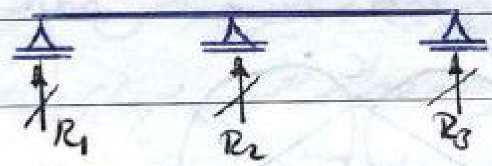
بار ساده

سازه ناپایدار استاتیکی

2) 

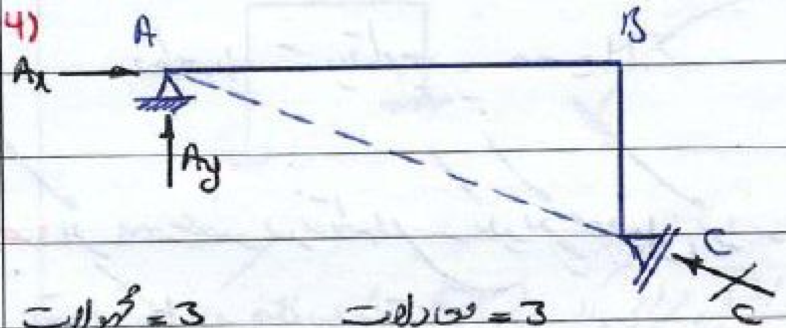
معادلات = 3 ، مجهولات = 3

ناپایدار هندسی ، سازه باز

3) 

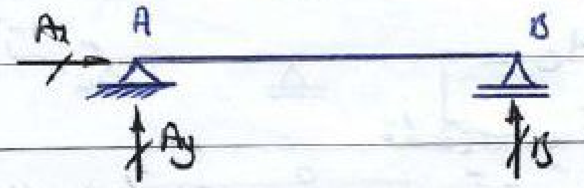
معادلات = 3 ، مجهولات = 3

ناپایدار هندسی ، بار ساده

4) 

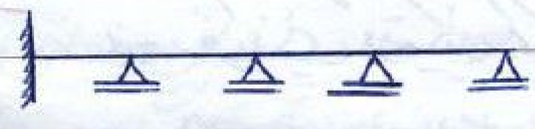
معادلات = 3 ، مجهولات = 3

ناپایدار هندسی ، بار ساده

5) 

معادلات = 3 ، مجهولات = 3

پایدار و معین

6) 

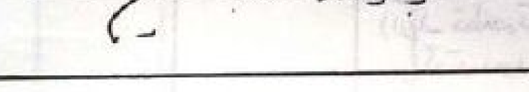
معادلات = 3 ، مجهول = 7

پایدار و 4 درجه نامعین

7) 

معادلات = 3+1 = 4 ، مجهولات = 4

سازه پایدار و معین ، بار ترکیبی

8) 

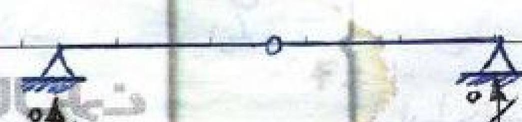
معادلات = 3+1 = 4 ، مجهولات = 3

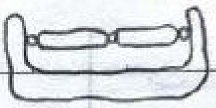
سازه ناپایدار استاتیکی ، بار ترکیبی

9) 

معادلات = 3+3 = 6 ، مجهولات = 4

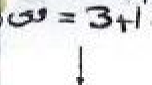
ناپایدار ، بار ترکیبی

10) 



معادلات = 3+1 = 4 ، مجهولات = 4

* هر جا سه لولا در امتداد هم قرار بگیرند آن سازه ناپایدار آنی است



بنابراین استثنائاً ناپایدار است.

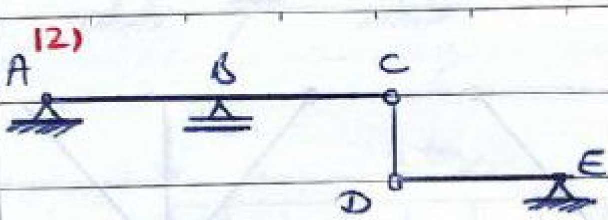
* غلتک است که می‌تواند حرکت افقی داشته باشد ($\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M = 0$)

11) 

معادلات = 3+2 = 5 ، مجهولات = 6

پایدار و 1 درجه نامعین

12)



مجهولات = 5

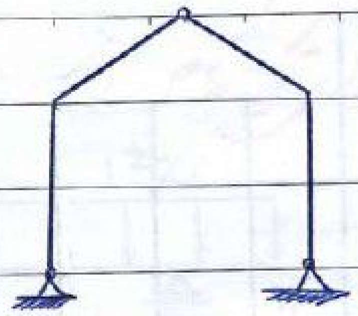
3 = تعادل ایستایی

2 = شرط

5

پایدار و معین

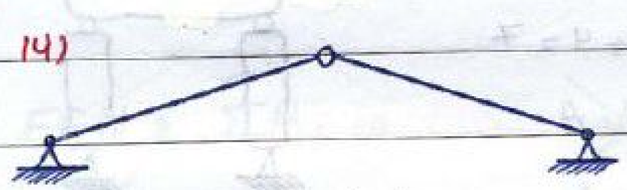
13)

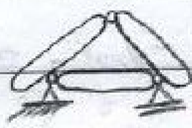


مجهولات = 4

معادلات = 3+1 = 4

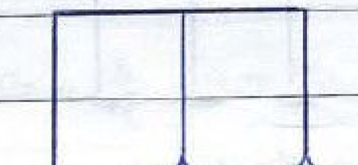
14)





پایدار

15)



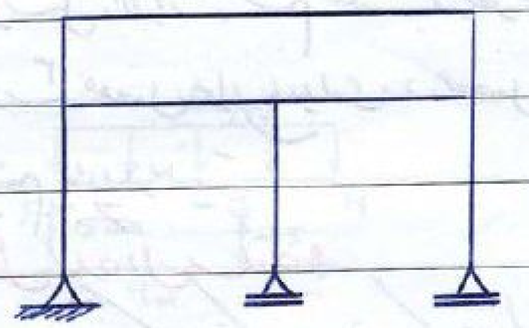
بازساده

مجهولات = 6

معادلات = 3

پایدار و 3 درجه نامعین

16)



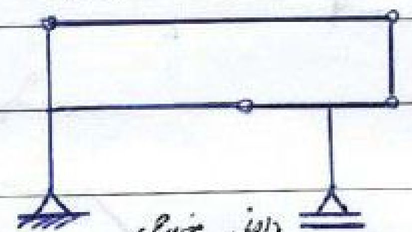
خارجی داخلی

مجهولات = 4 + 3 = 7

معادلات = 3

پایدار و 4 درجه نامعین (1 خارجی + 3 داخلی)

17)



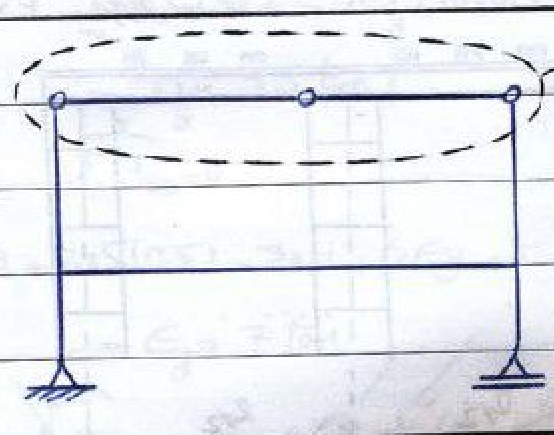
ناپایدار (داخلی)

داخلی خارجی

مجهولات = 3 + 3 = 6

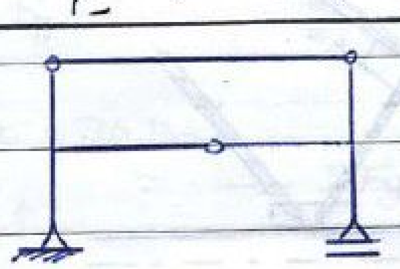
معادلات = 3 + 4 = 7

19)



ناپایدار داخلی

18)

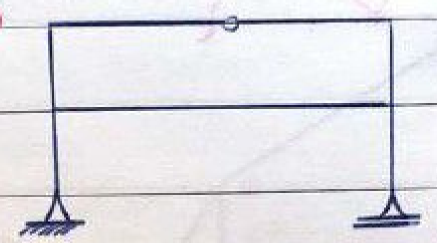


مجهولات = 3 + 3 = 6

معادلات = 3 + 3 = 6

پایدار و معین داخلی

20)



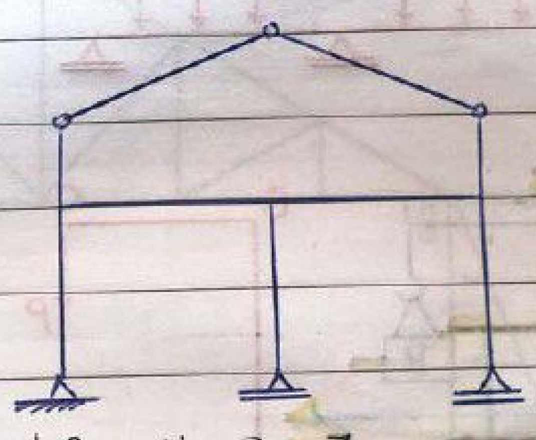
مجهولات = 3 + 3 = 6

ایستایی

معادلات = 3 + 1 = 4

پایدار و 2 درجه نامعین داخلی

21)



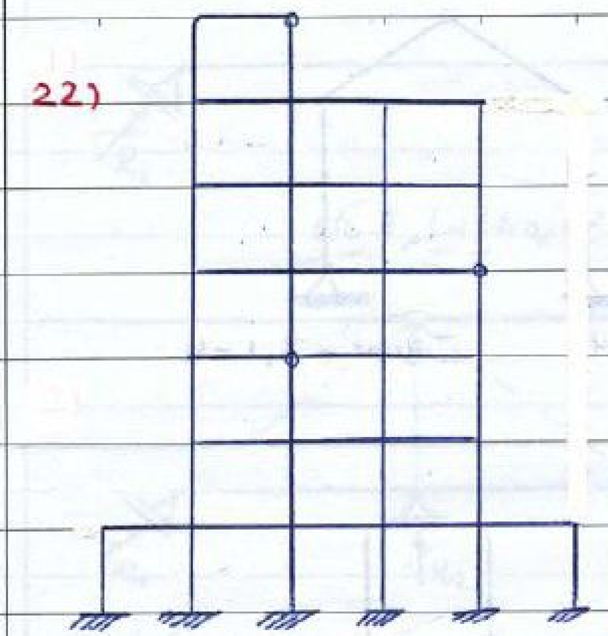
مجهولات = 4 + 3 = 7

معادلات = 3 + 3 = 6

پایدار و یک درجه نامعین خارجی

۱) اگر شکل پایین را دو جسم صلب در نظر بگیریم به جای وجود یک مفصل و یک میله برای پایداری فقط یک میله داریم. پس جسم پایدار نیست.

22)

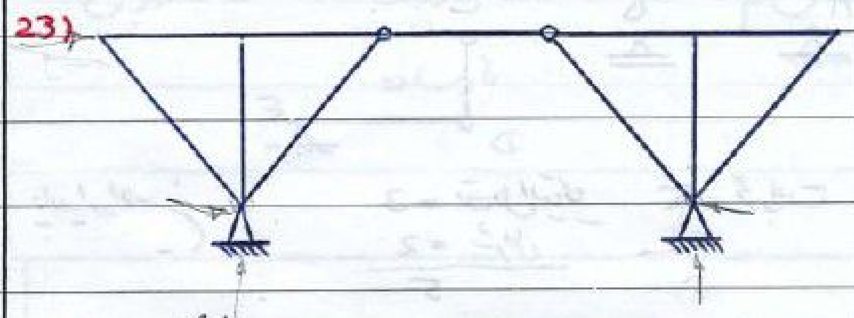


سازه پایدار و نامعین 15 درجه خارجی
42 درجه داخلی

مجهولات = 6x3 + 16x3 = 18 + 48 = 66

معادلات = 3 + 6 = 9

23)

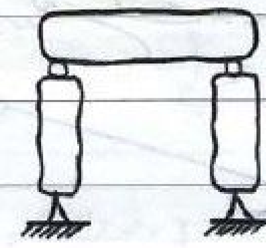


مجهولات = $\overset{\text{خارجی}}{4}$ + 12 = 16

معادلات = 3 + 4 = 7

~~9 درجه نامعین~~

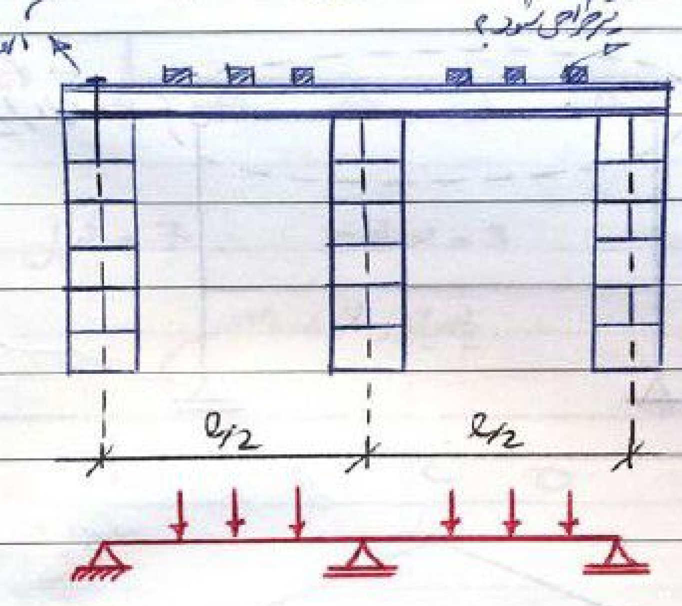
ناپایدار

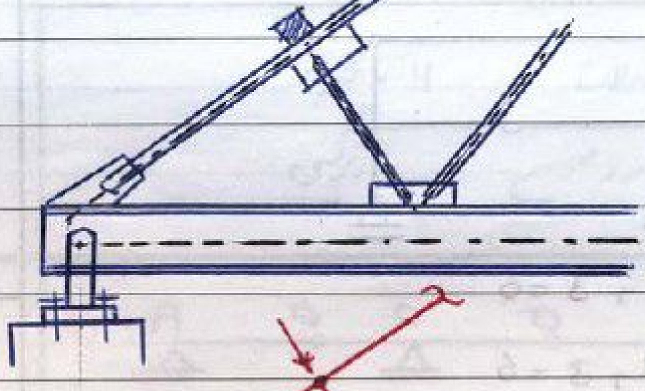


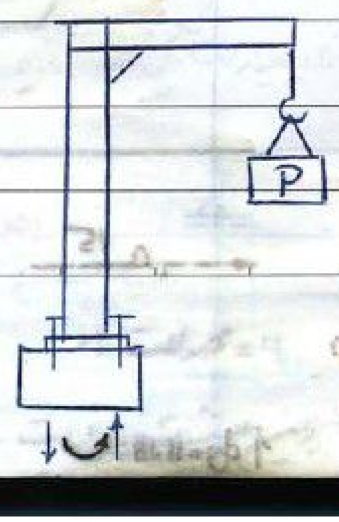
۱۲) اگر شکل بالا را ۳ جسم صلب در نظر بگیریم به جای وجود ۳ مفصل برای پایداری دو مفصل داریم. پس جسم پایدار نیست

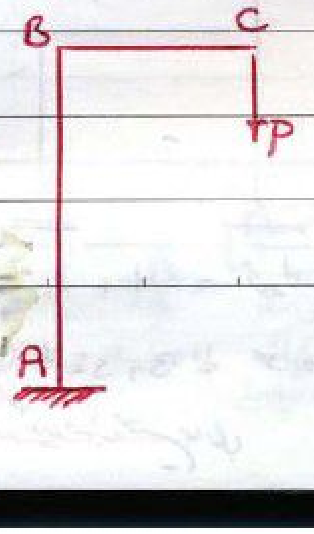
مدل ایده‌آل سازه

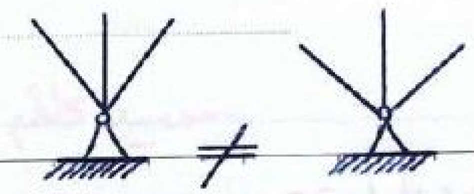
طرح هندسی در آنالیز سازه با یک خط داده می‌شود، محور سازه نسبت به مدل ایده‌آل سازه است که هر چه قدر با رفتار واقعی عضو مطابقت داشته باشد مدل‌سازی دقیق‌تر بوده و دقت نتایج بیشتر خواهد شد.
برای این منظور چند نمونه کوچک ارائه می‌شود.



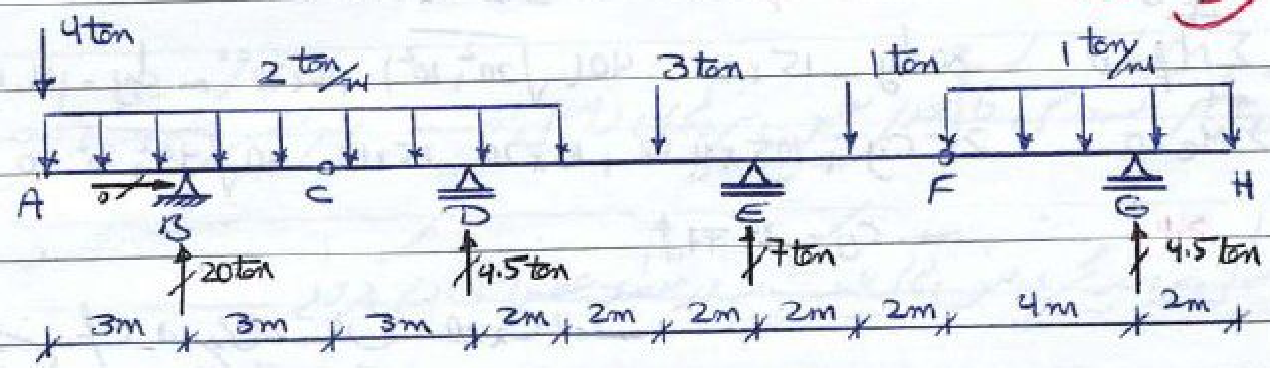








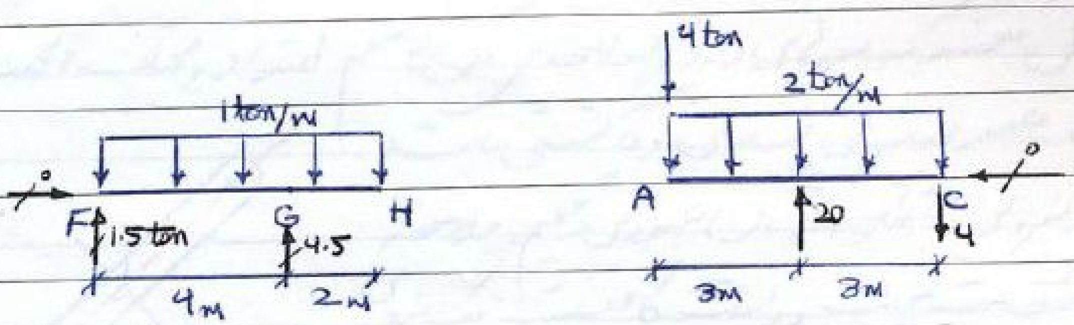
تعیین واکنش های تکیه گاهی

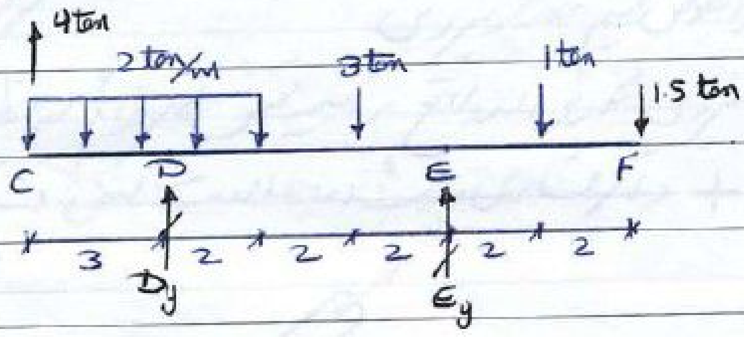


FGH : $\sum M_F = 0 \longrightarrow -6\times 3 + 4G = 0 \Longrightarrow G = \frac{18}{4} = 4.5 \text{ ton}$

کل سازه : $\sum F_x = 0 \longrightarrow B_x = 0$

ABC : $\sum M_C = 0 \longrightarrow -3B_y + 4\times 6 + 12\times 3 = 0 \Longrightarrow B_y = 20 \text{ ton}$





CDEF : $\sum M_E = 0$

$-1.5\times 4 - 1\times 2 + 3\times 2 - 6D_y + 10\times 6.5 - 4\times 9 = 0$

$\longrightarrow D_y = 4.5 \text{ ton}\uparrow$

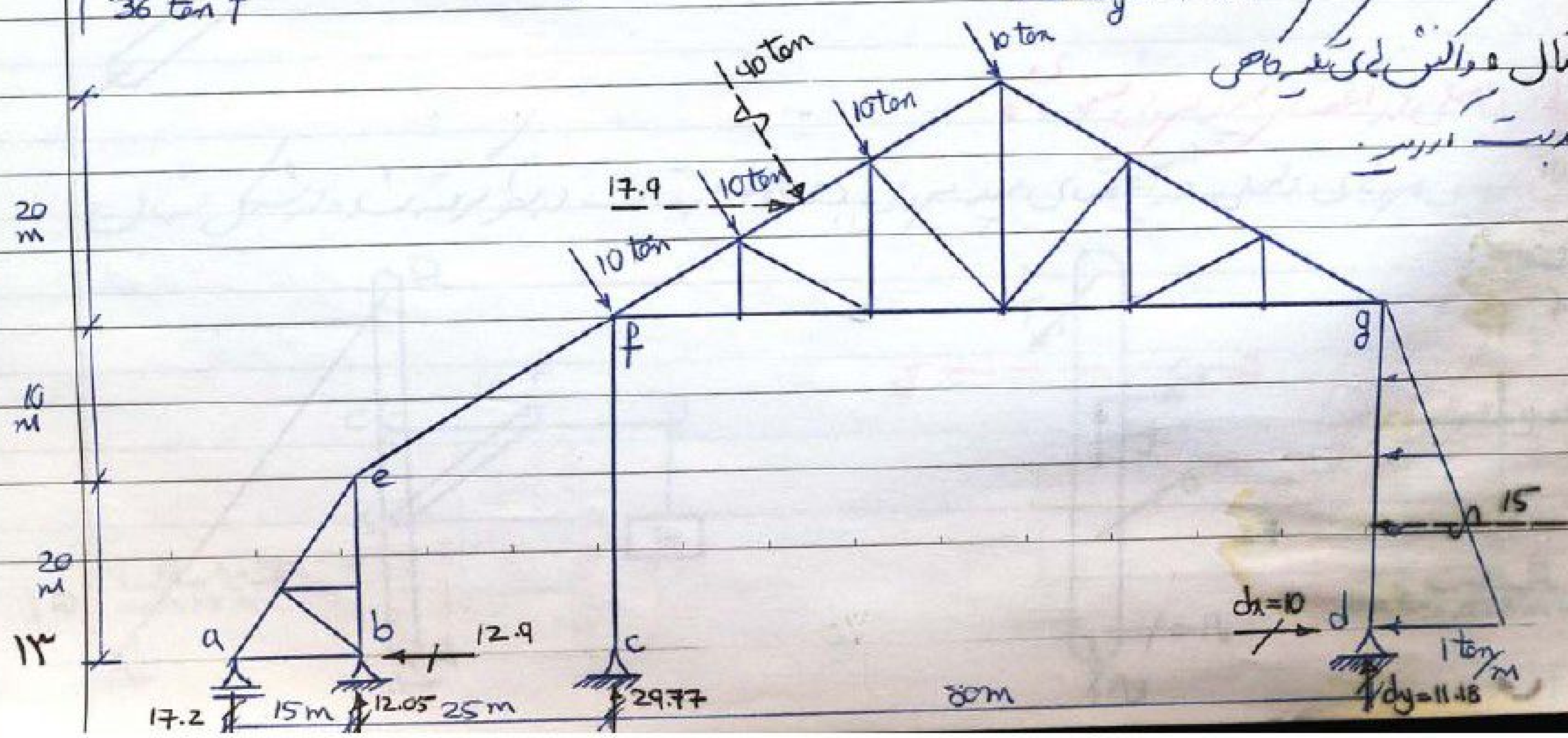
$\sum M_D = 0$

$-4\times 3 + 2\times 5(0.5) - 3\times 4 + 6E_y - 8 - 10(1.5) = 0$

$\longrightarrow E_y = 7 \text{ ton}$

$\left\{\begin{array}{l} 14 + 22 = 36 \text{ ton}\downarrow \\ 36 \text{ ton}\uparrow \end{array}\right. \longrightarrow \sum F_y = 0$ برقرار است

مثال : واکنش های تکیه گاهی را بدست آورید.



dg عضو : $\overset{\curvearrowleft +}{\sum} M_g = 0 \qquad 30\, d_x - 15 \times 20 = 0 \rightarrow d_x = 10 \text{ ton}$

fgd عضو : $\overset{\curvearrowleft +}{\sum} M_f = 0 \qquad 80\, d_y - 15 \times 20 - 40\left(\sqrt{20^2 + 10^2}\right) + \overset{=0}{10 \times 30} \rightarrow d_y = 11.18 \text{ ton}$

efgd عضو : $\overset{\curvearrowleft +}{\sum} M_e = 0 \qquad 25\, C_y + 105 \times 11.18 + 10 \times 20 - 15 \times 10 - 40\sqrt{45^2 + 20^2} = 0$

$$\rightarrow C_y = 29.77 \uparrow$$

چون cf دو نیرویی است پس $C_x = 0$ است.

کل سازه : $\sum F_x = 0 \rightarrow -b_x - 15 + 10 + 17.9 = 0 \rightarrow b_x = 12.9$

abe عضو : $\overset{\curvearrowleft +}{\sum} M_e = 0 \rightarrow 12.9 \times 20 = 15 a_y \rightarrow a_y = 17.2 \downarrow$

کل سازه : $\sum F_y = 0 \rightarrow 11.18 - 35.8 + 29.77 + B_y - 17.2 = 0 \rightarrow B_y = 12.05$

فصل دوم :

حمید کاظم

تعیین نیروهای داخلی و رسم نمودار تغییرات آن‌ها در طول عضو

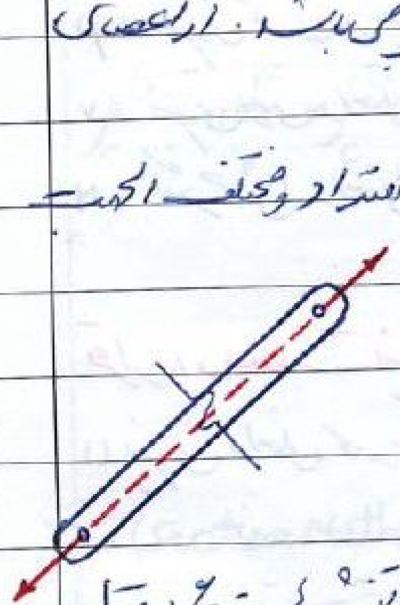
بعد از تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی گام بعدی تعیین نیروهای داخلی است. برای این کار ابتدا با طبیعت نیروهای داخلی آشنا می‌شویم.

به طور کلی نیروی داخلی برآیند مجموعه تنش‌هایی است که در مقطع عضو ایجاد می‌گردد.

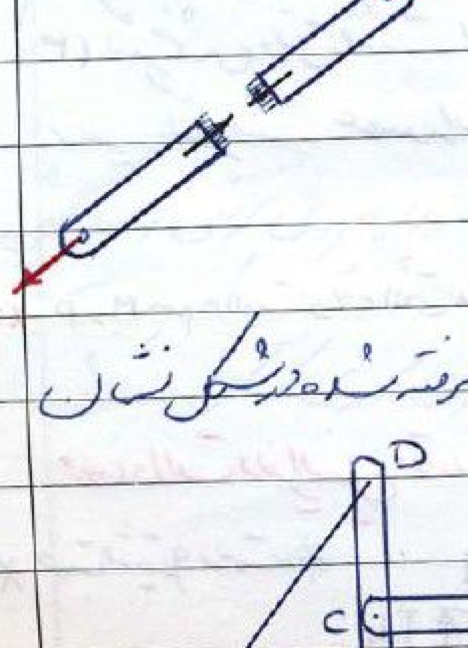
نیروی داخلی اعضای دو نیرویی :

اعضای دو نیرویی اعضای مستقیمی باشند که دو انتهای آن‌ها مفصلی است و فقط از طریق دو انتهای یک نیروهای خارجی قرار می‌گیرند. نمونه‌هایی از اعضای دو نیرویی اعضای موجود یک خرپا می‌باشد. از اعضای دو نیرویی ممکن است در قاب‌ها نیز استفاده گردد.

اعضای دو نیرویی وقتی در حال تعادل هستند که نیروهای وارد بر دو انتهای آن‌ها هم امتداد و مخالف الجهت باشند. در این حالت ممکن است عضو دو نیرویی فشاری و یا کششی باشد.

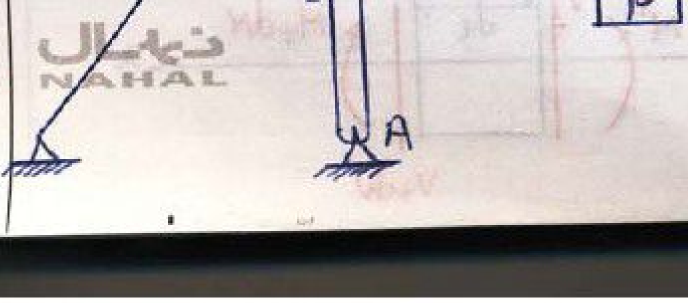


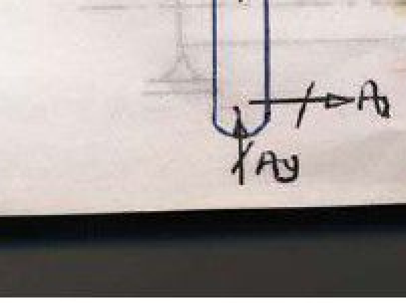
برای تعیین نیروی داخلی در عضو دو نیرویی مقطعی از آن عبور می‌دهیم. ملاحظه می‌شود برای حفظ تعادل هر کدام از قطعات چپ و راست کافیست یک نیروی محوری در محل قطع شده داشته باشیم. اگر محل مقطع را عوض کنیم مقدار نیروی محوری تغییر نمی‌کند و در طول عضو ثابت است. این نیروی محوری در واقع برآیند تنش‌های قائم در مقطع می‌باشد. علامت قرار دادی اگر کششی باشد با علامت + و اگر فشاری باشد با علامت منفی (−) در نظر گرفته می‌شود.



نیروهای داخلی در اعضای چند نیرویی صفحه‌ای :

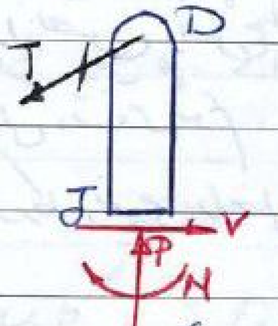
برای بررسی نیروهای داخلی در اعضای چند نیرویی ABCD از قاب در نظر گرفته شده در شکل نشان داده می‌شود.





Cx و Cy واکنش‌های اتصال

برای مطالعه نیروهای داخلی مقطعی مانند J از اشکال عضو داده شده نمودار آزاد DJ را رسم می کنیم.



در این نمودار آزاد برای حفظ تعادل نیروها در امتداد قائم نیاز به نیروی داخلی محوری P می باشد. برای تعادل در امتداد افقی نیاز به نیروی برشی داخلی V می باشد و برای تعادل لنگر وجود لنگر خمشی M لازم است.

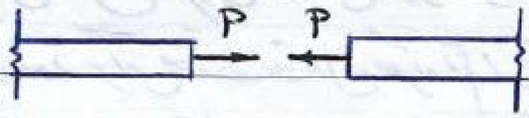
در اعضای چند نیرویی صفحه ای در حالت کلی وجود این ۳ نیروی داخلی لازم است. از طرف دیگر با تغییر مقطع J مقدار نیروهای داخلی نیز تغییر می کند حتی ممکن است جهت آنها نیز عوض گردد. پس برای طراحی لازم است نمودار تغییرات آنها در طول عضو رسم گردد.

P: نیروی محوری داخلی = تلاش محوری

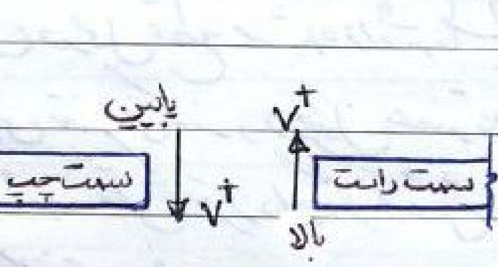
V: نیروی برشی داخلی = تلاش برشی

M: لنگر خمشی داخلی = تلاش خمشی

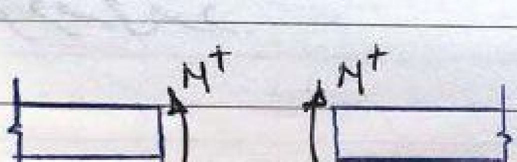
قرارداد علامت نیروهای داخلی:



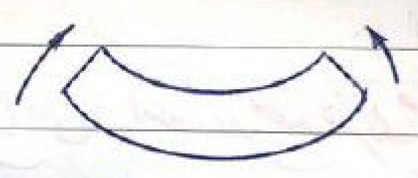
۱) نیروی داخلی محوری P وقتی مثبت است که کششی باشد.



۲) نیروی برشی وقتی مثبت است که در قطعه سمت چپ به سمت پایین و در سمت راست به سمت بالا باشد.

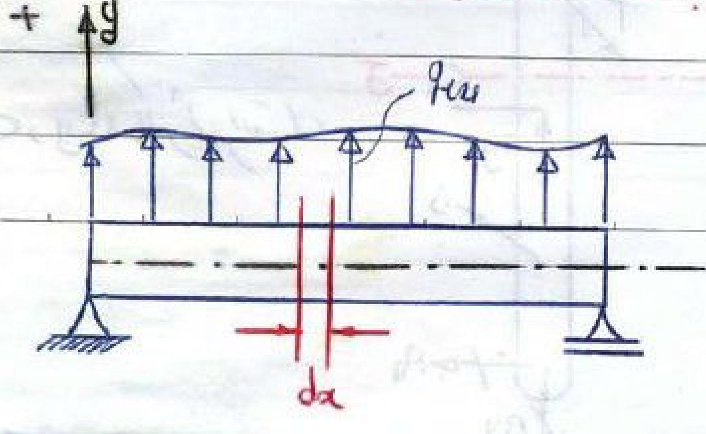


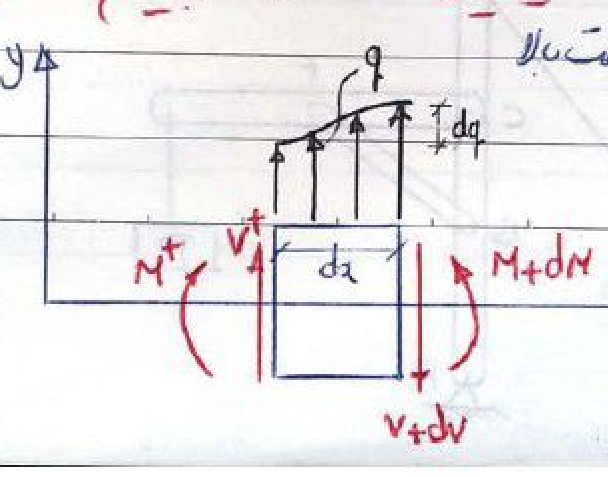
۳) لنگر خمشی وقتی مثبت است که در تار پایینی ایجاد کشش نماید. لنگر مثبت عضو را به صورت کاسه ای در می آورد.



معادلات دیفرانسیل تعادل (روابط بین بارگذاری، نیروی برشی و لنگر خمشی):

* جهت مثبت q به سمت بالا





$$\sum F_y = 0 \uparrow^+ \Rightarrow V - (V + dV) + q\,dx + \cancel{dq\,dx\,\tfrac{1}{2}} = 0$$

$$\rightarrow -dV + q\,dx = 0 \rightarrow q(x) = \frac{dV}{dx}$$

شیب نمودار برش برابر شدت بار وارده است.

$$\int_C^D q(x)\,dx = \int_C^D dV \Rightarrow V_D - V_C = \int_C^D q\,dx \qquad \left(V_2 - V_1 = \int q\,dx\right)$$

تغییرات برش بین دو نقطه C و D برابر است با بار وارده بین دو نقطه C و D (مقدار بار وارده)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -M + (M + dM) - (V + dV)\,dx + q\frac{\cancel{(dx)^2}}{2} + \frac{1}{2}\cancel{dq\,dx}\,dx\frac{2}{3} = 0$$

$$\rightarrow dM - V\,dx + (dx)^2 dV = 0 \rightarrow V(x) = \frac{dM}{dx}$$

شیب نمودار لنگر خمشی برابر نیروی برشی در هر مقطع می‌باشد.

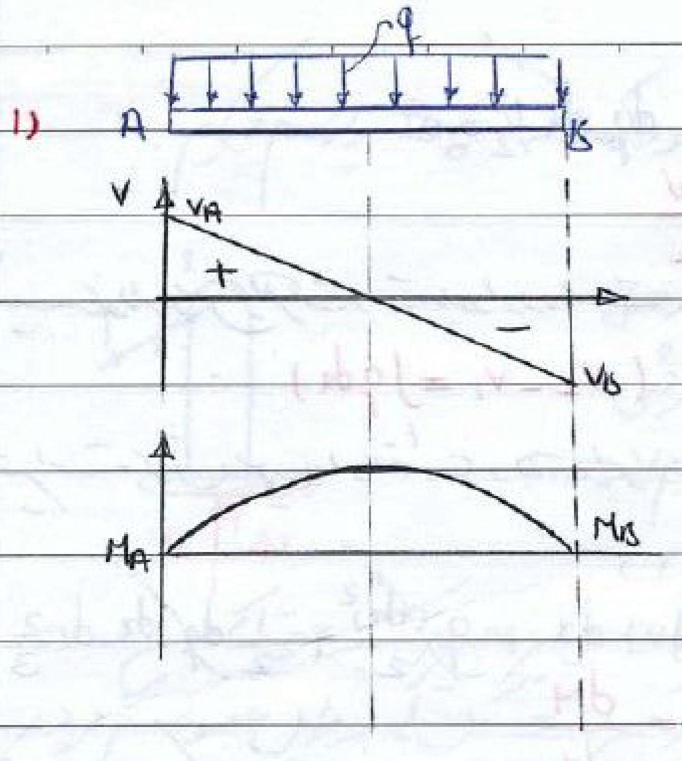
$$\int_C^D V(x)\,dx = \int_C^D dM \Rightarrow M_D - M_C = \int_C^D V\,dx \qquad \left(M_2 - M_1 = \int V\,dx\right)$$

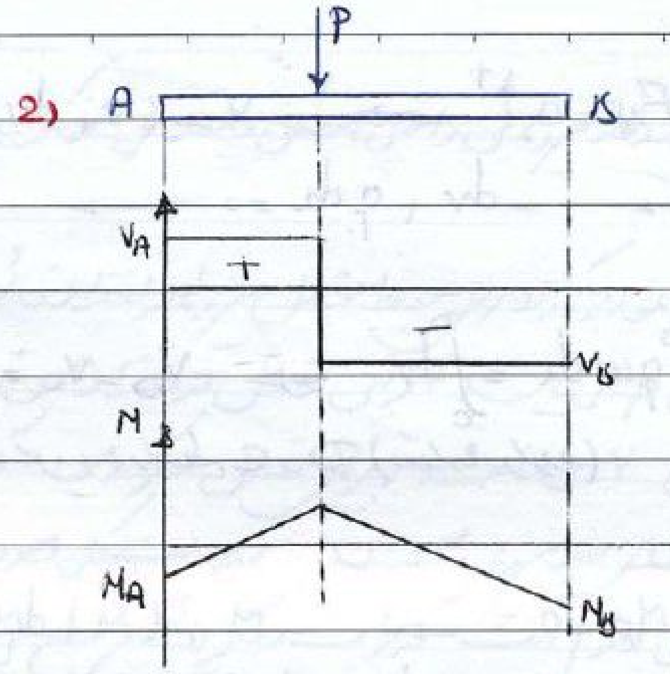
تغییرات لنگر خمشی بین دو حد C و D برابر با سطح زیر نمودار برش بین دو نقطه C و D.

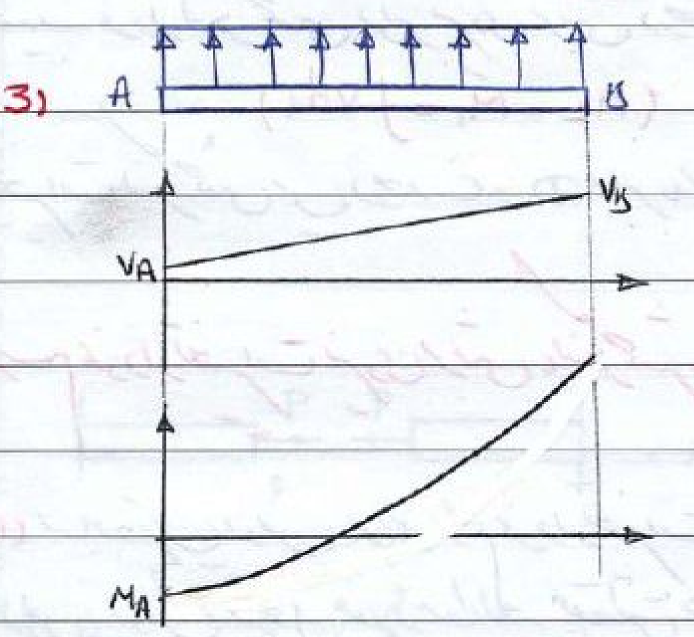
رسم نمودار تغییرات نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری:

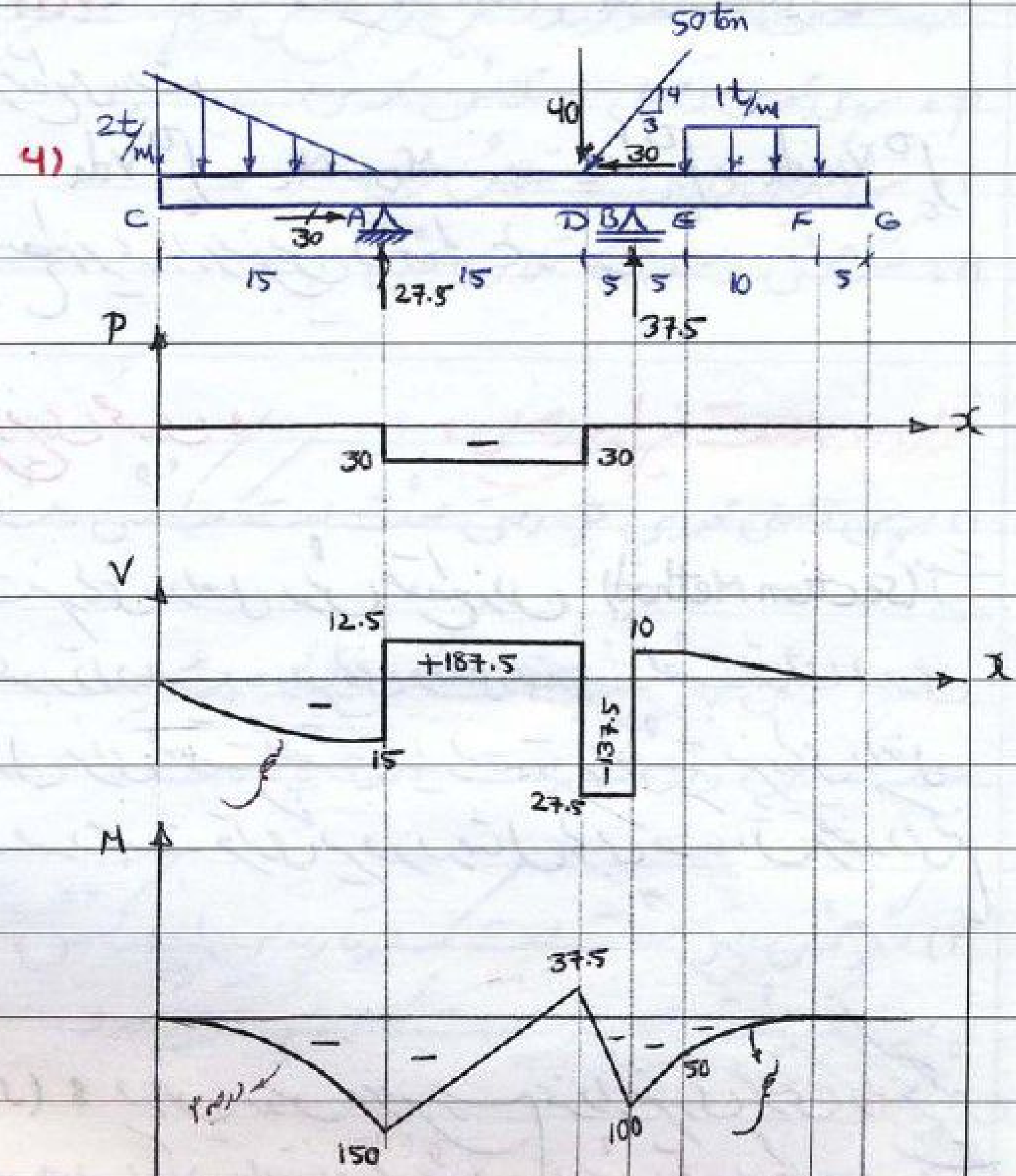
۱) ساده‌ترین روش برای رسم نمودار تغییرات نیروهای داخلی روش مقطع زدن (Section Method) است. در این روش در محل مورد مطالعه مقطعی عبور داده شده و نیروهای داخلی در جهت مثبت نشان داده و روی آن نمایش داده می‌شوند. معادلات تعادل برای قسمت چپ یا راست را نوشته نیروهای داخلی محاسبه می‌گردد. این روش در استاتیک مورد بحث قرار گرفته و در مثال‌هایی که تا این جا حل کردیم آن را مورد توجه قرار دادیم.

۲) روش جمع زدن (Summation Method): در این روش برای رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی از معادلات دیفرانسیل تعادل و نتایج حاصل از آن استفاده می‌شود. روش تند و کاربردی است و در مثال‌های این فصل بیشتر از آن استفاده خواهد شد. توجه شود که نیروی محوری کماکان با روش مقطع زدن بدست می‌آید.





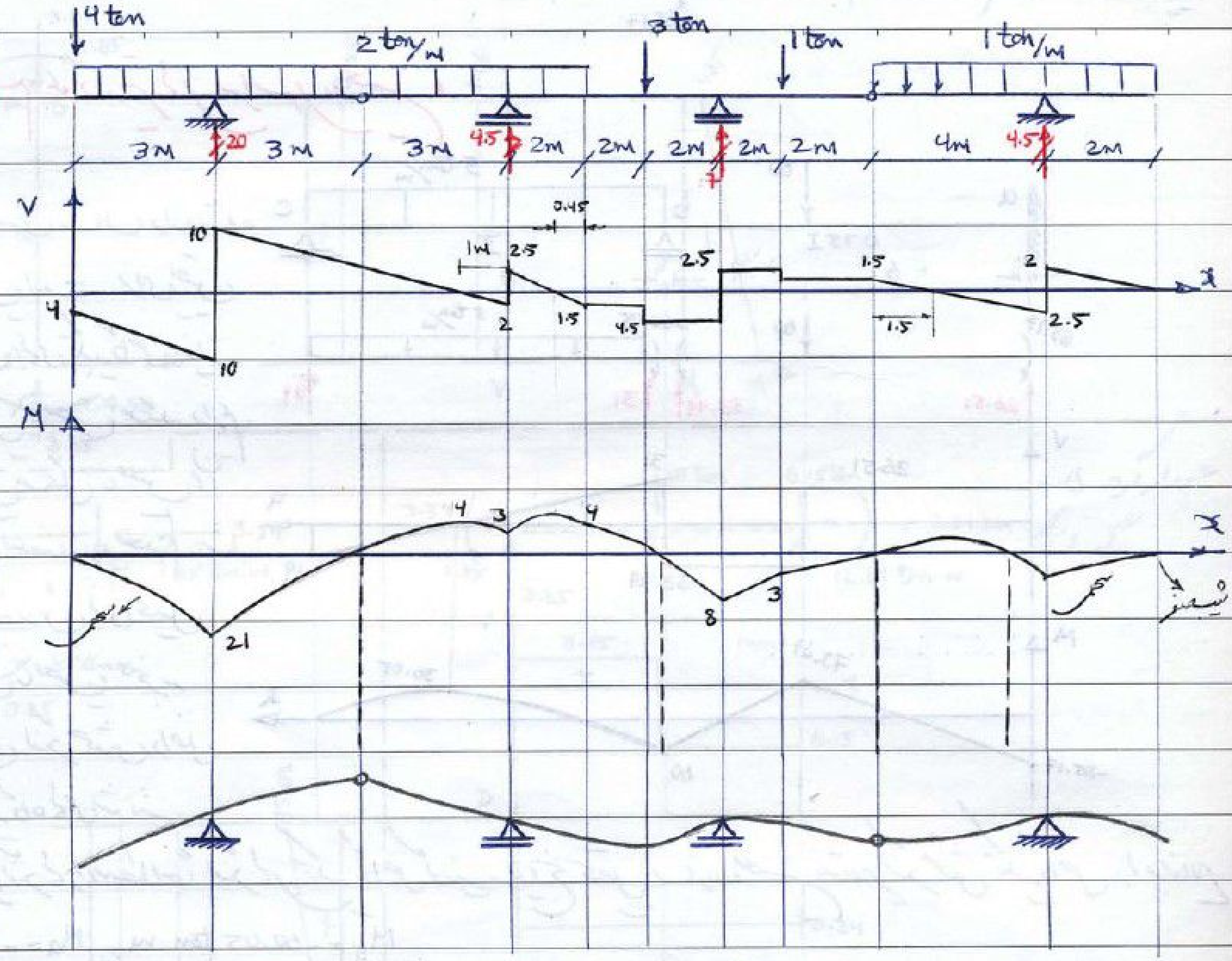




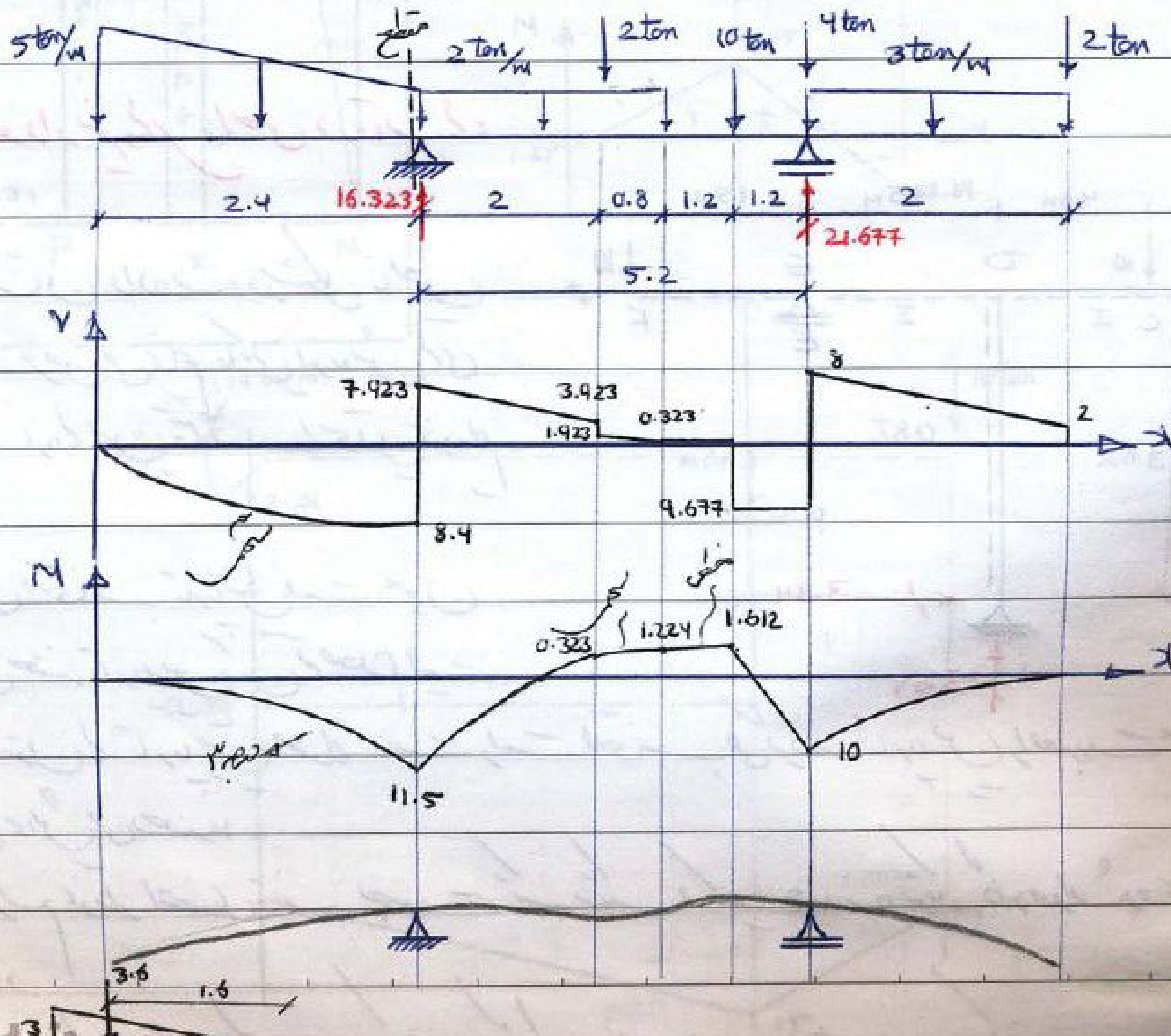
نکته ۶: در هنگام رسم نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی همواره تمام نیروهای خارجی باید به مولفه‌هایی در امتداد عمود و در محور عضو تجزیه گردند.

مفصل داخلی تاثیری بر نمودار برشی ندارد و لنگر خمشی صفر است.

5)



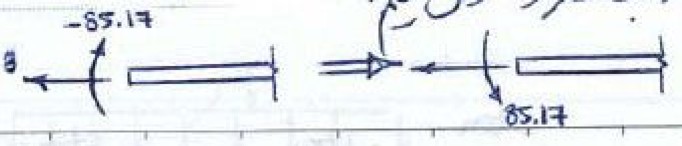
6)



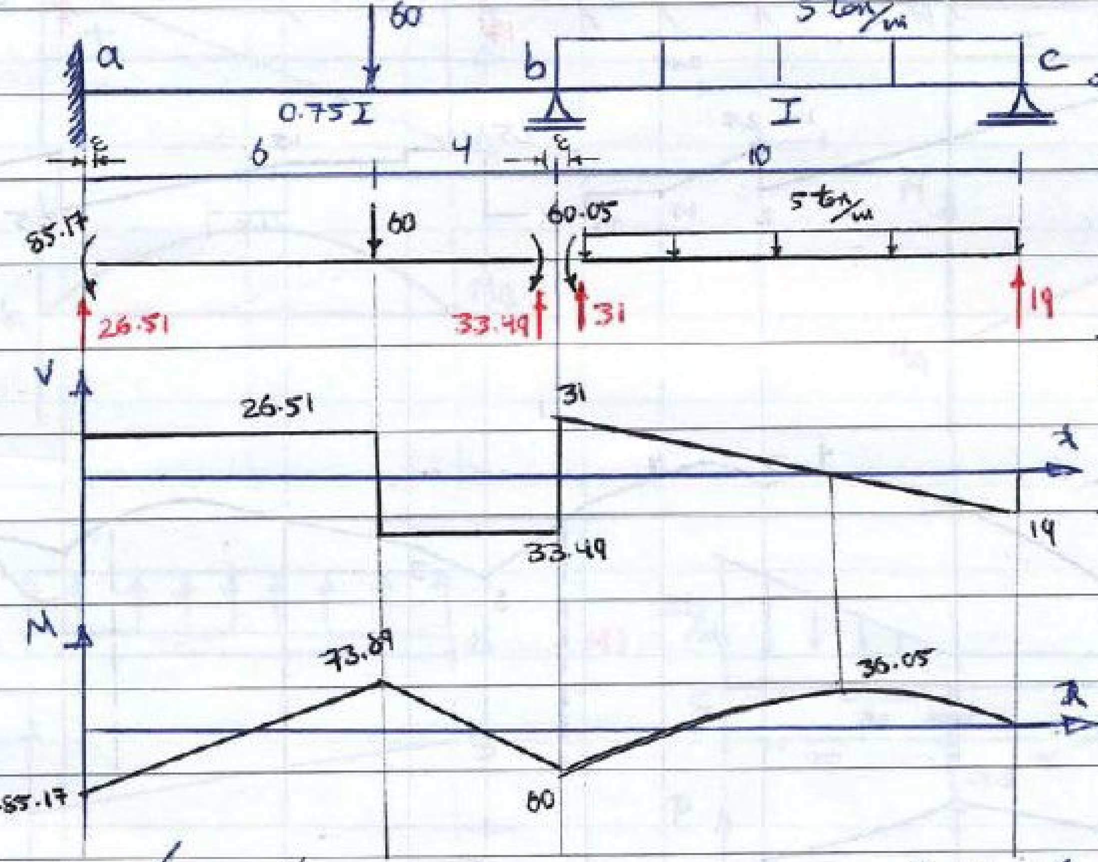
$M = 4.8 \times 1.2 + 3.6 \times 1.6 = -11.5$

۸- اگر لنگر خمشی داخلی داده شد در نقطه مورد نظر مقطع می‌زنیم و جهت قراردادی لنگر را رسم می‌کنیم و سپس عدد را بر روی جهت قراردادی قرار می‌دهیم. اگر عدد لنگر منفی بود می‌توانیم جهت لنگر را عوض کنیم.

مثال پایین (نقطه a)



رسم نمودار تیرهای سراسری نامعین

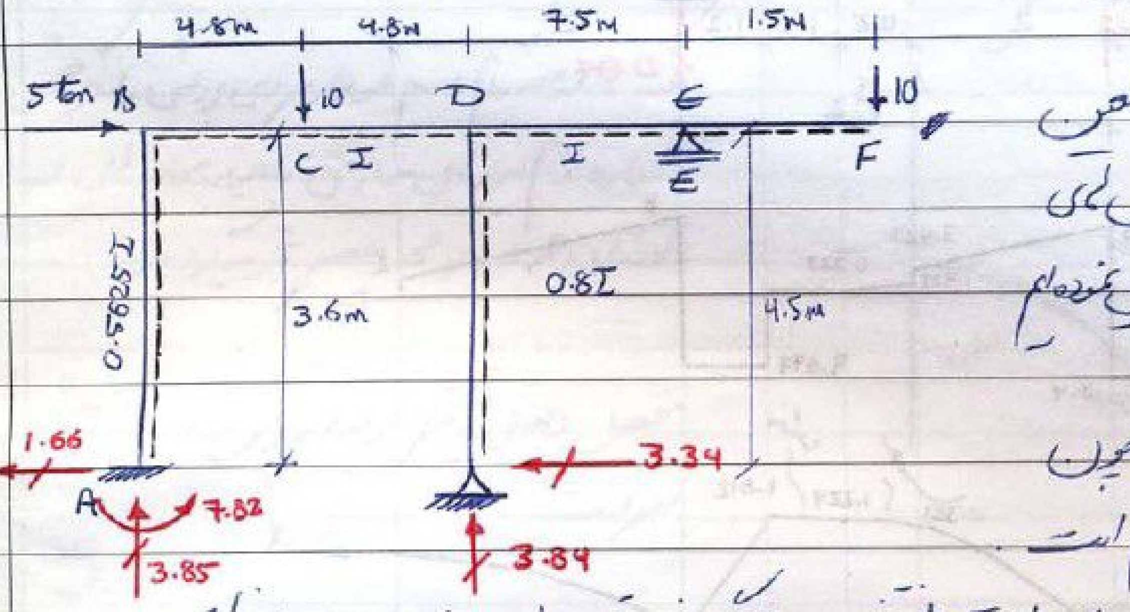


تیر سراسری نشان داده شده نامعین است. برای تعیین واکنش‌های تکیه‌گاهی نیاز به تحلیل نامعین مسئله داریم. در تحلیل مسائل نامعین مشخصات هندسی اعضا باید معلوم باشد. اغلب روش‌های تحلیل مسائل نامعین منجر به تعیین لنگر خمشی داخلی در تکیه‌گاه‌ها می‌شوند.

این لنگرها را اصطلاحاً لنگرهای تکیه‌گاهی گویند. نتایج تحلیل سازه نامعین مقادیر لنگر خمشی تکیه‌گاهی را به مقادیر

$M_b = -60.05$ ton.m , $M_a = -85.17$ ton.m

رسم نمودار نیروهای داخلی در قاب‌ها

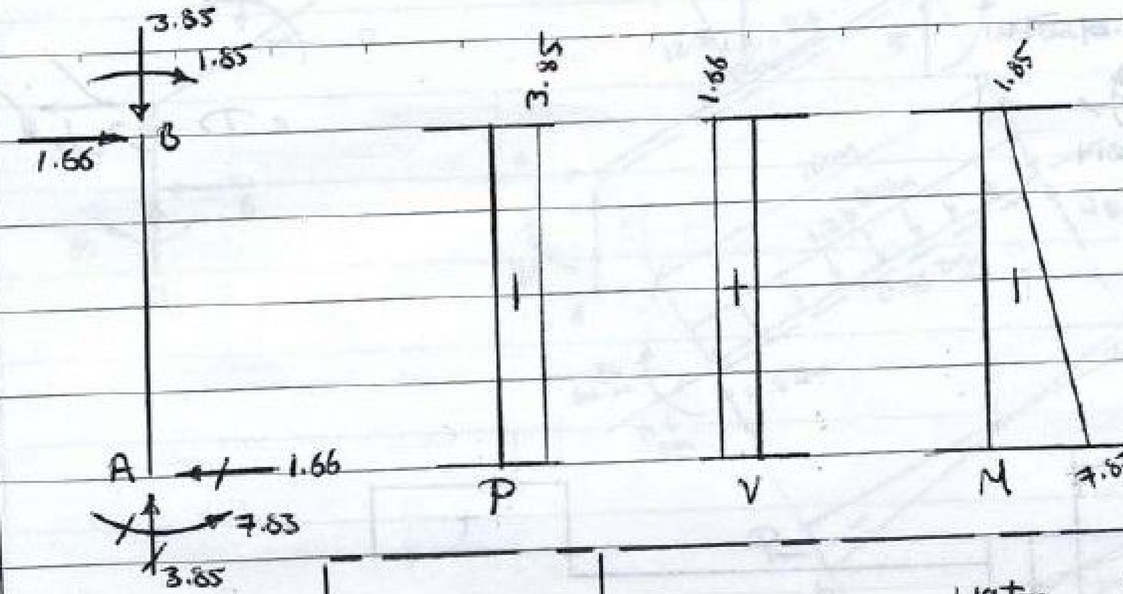


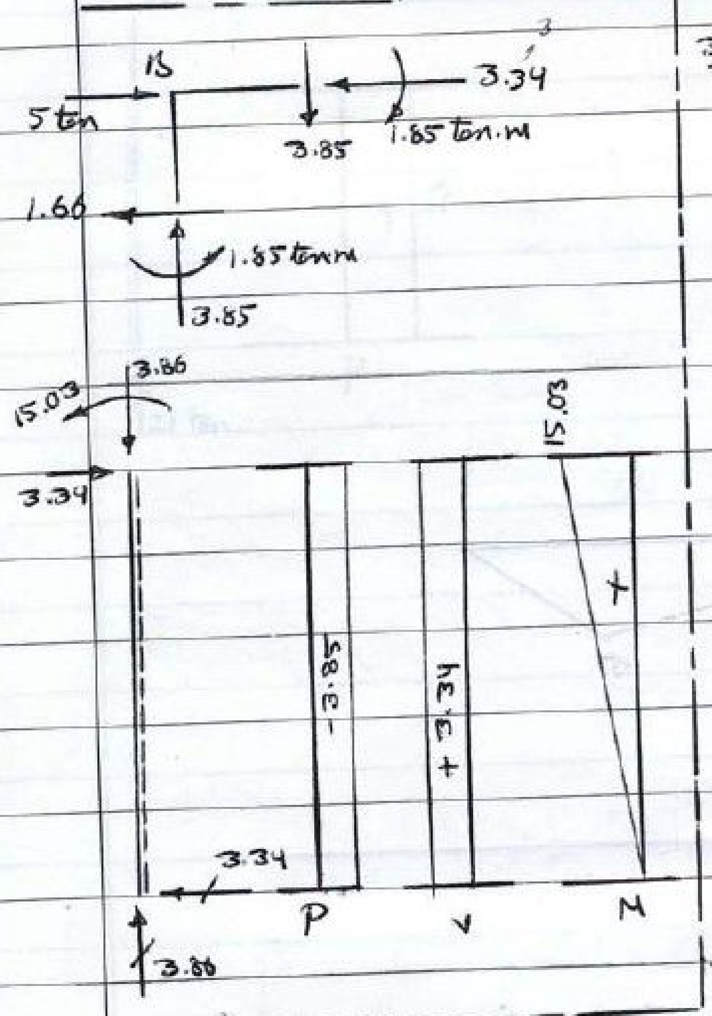
قاب نشان داده شده در شکل نامعین است. فرض می‌نماییم با یکی از روش‌های تحلیل سازه‌ها این قاب را تحلیل نموده‌ایم.

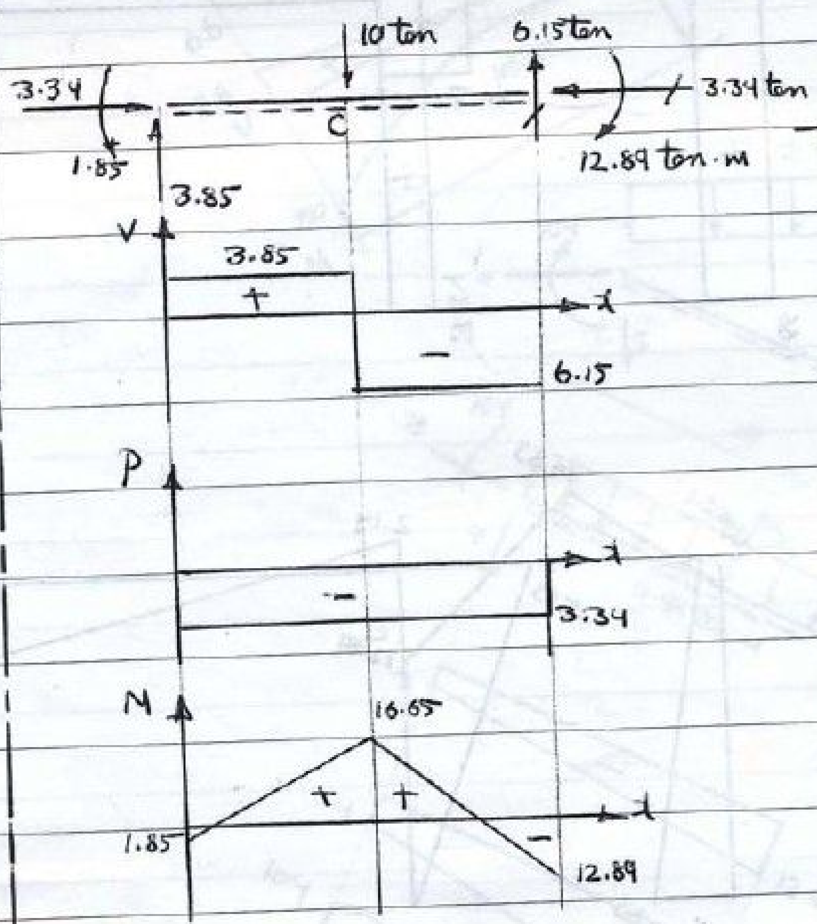
گام بعدی انتخاب تار پایین است. چون تیرها افقی هستند تار پایین آن‌ها معلوم است. در مورد ستون‌ها تار پایینی معمولاً سمت راست انتخاب می‌گردند. تار پایین را به صورت خط‌چین روی شکل نمایش می‌دهند.

برای رسم نمودار اعضای قاب به صورت تک تک هر کدام را مانند تیر تکیه‌گاه ساده شده نمودارشان را رسم می‌کنیم.

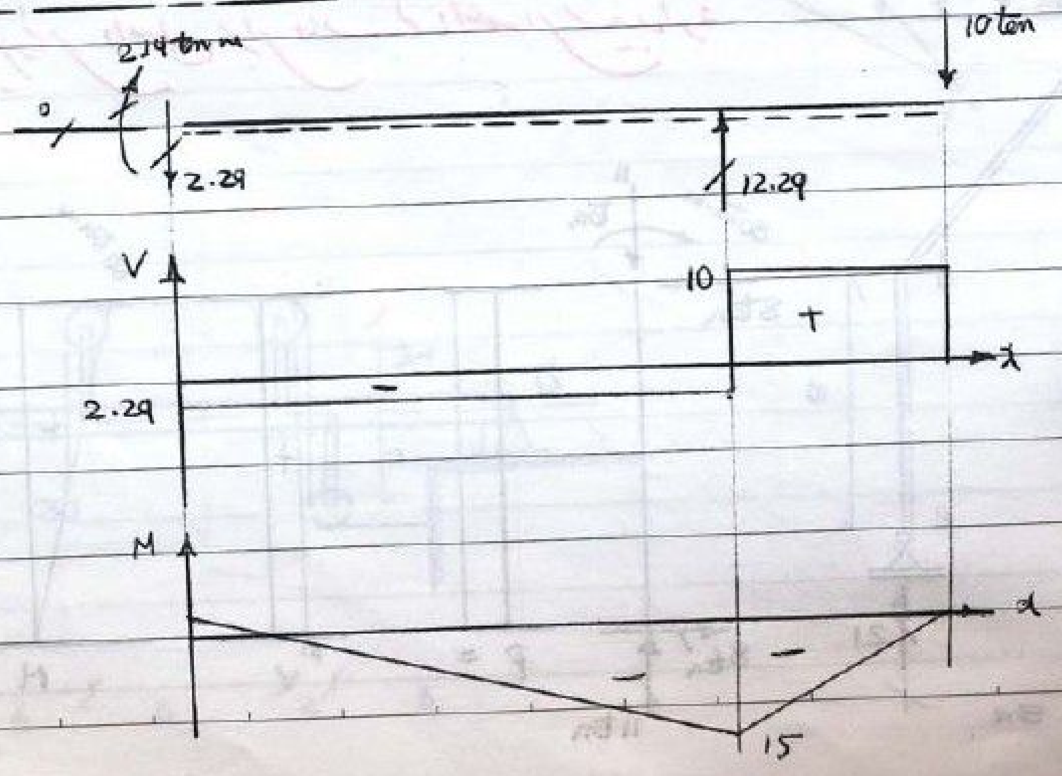
* عضو AB را مانند تیر جدا می‌کنیم و چون به گره کاری نداریم یعنی 5 ton را بررسی نمی‌کنیم.



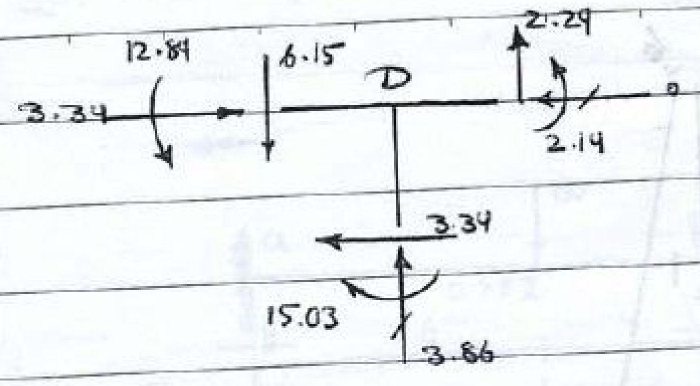


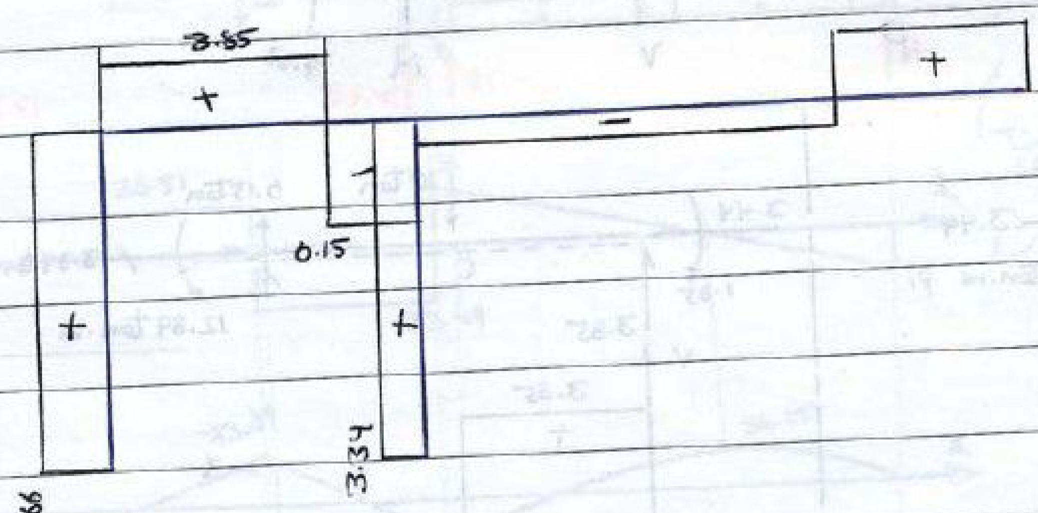


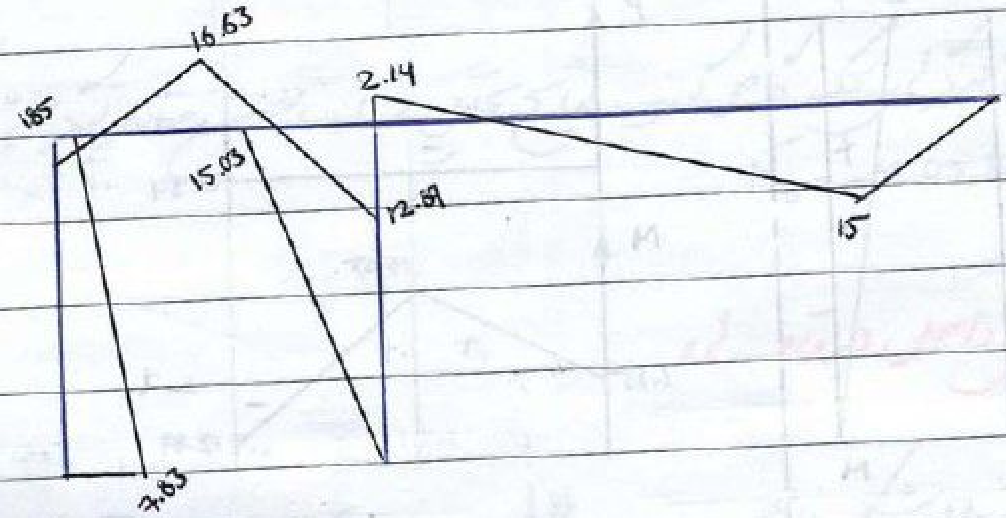
عبور از گره B و



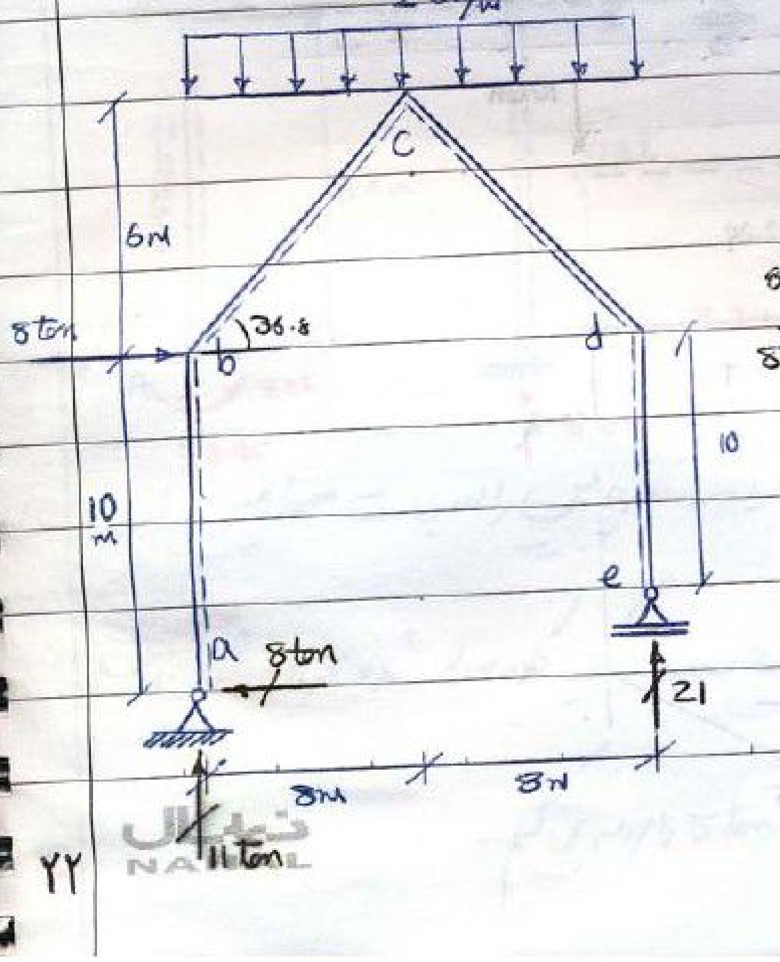
کنترل گره D ،

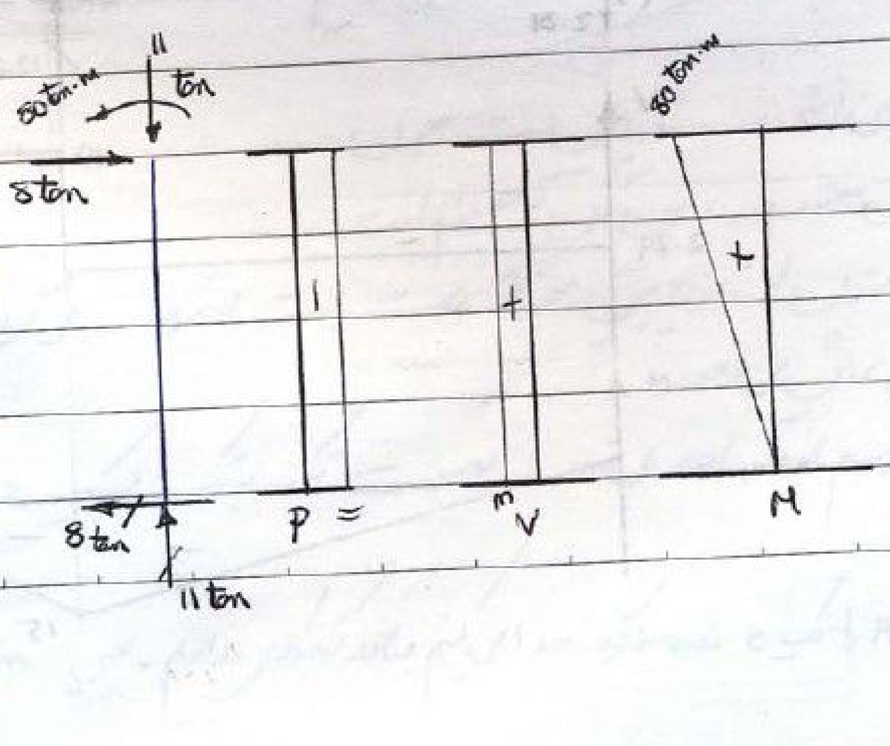


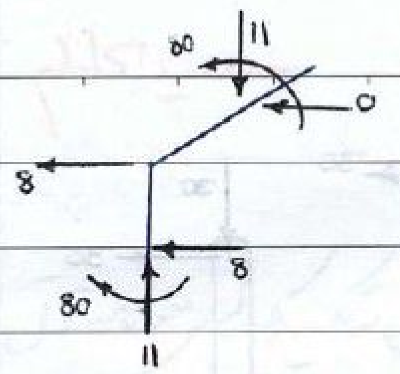


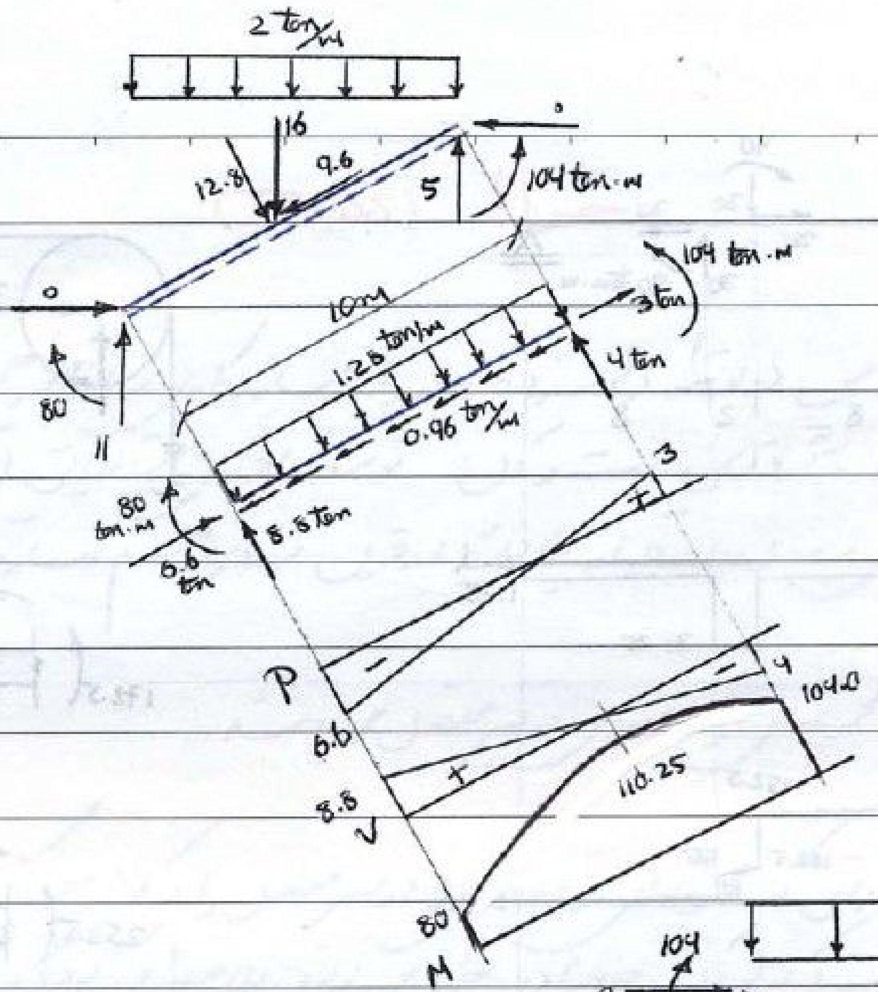


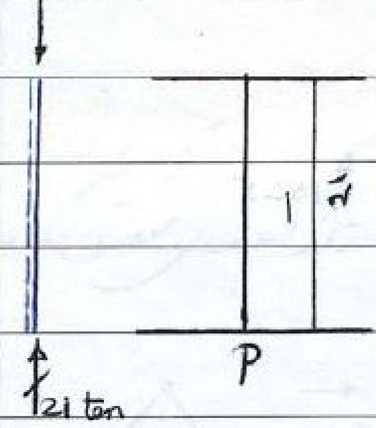
رسم نمودار نیروهای داخلی برای قاب با اعضای شیبدار

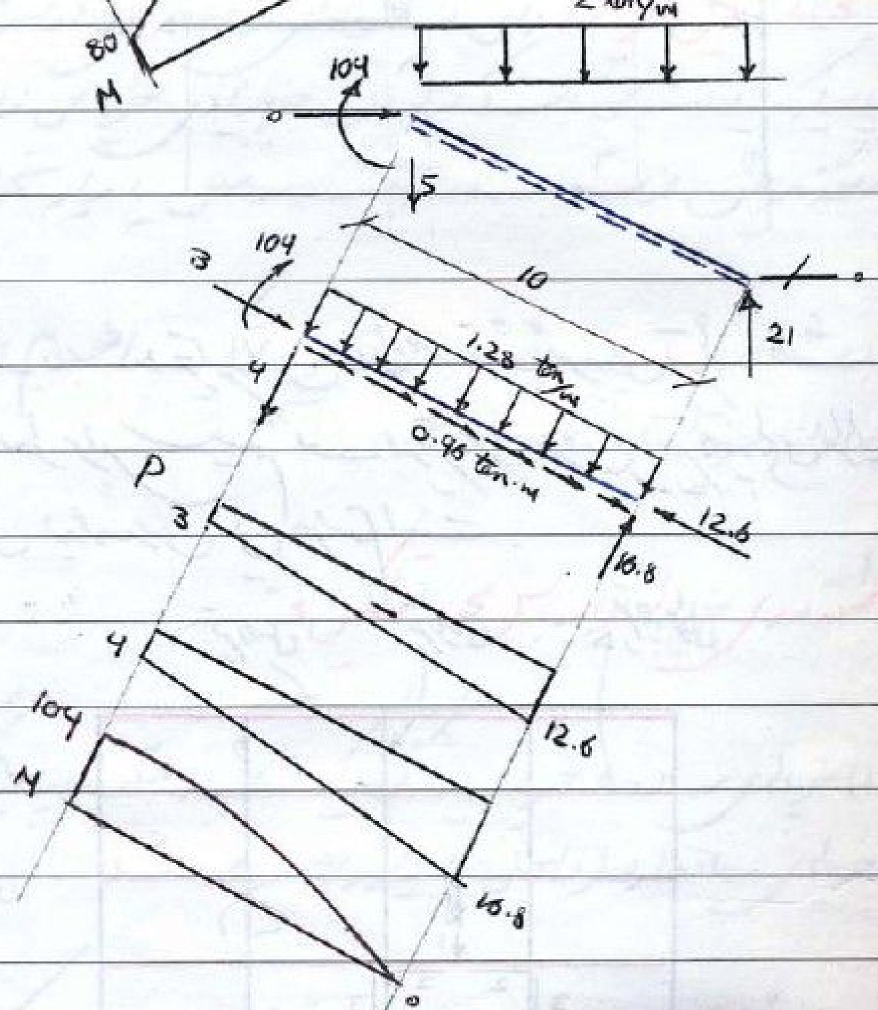




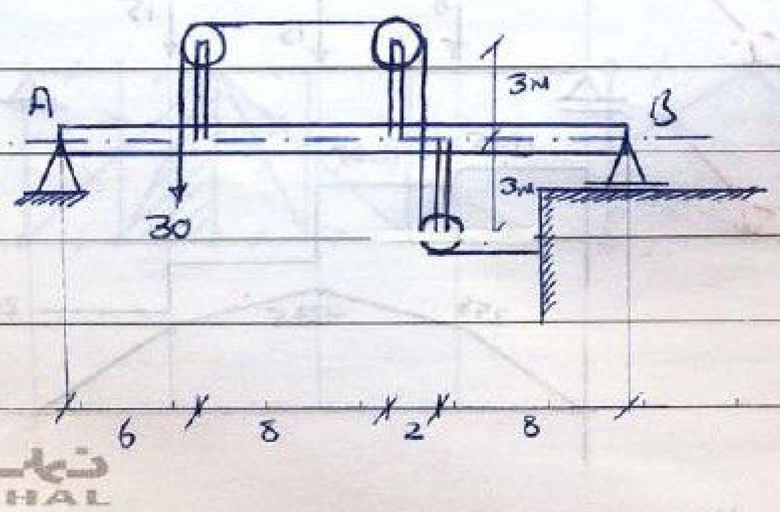


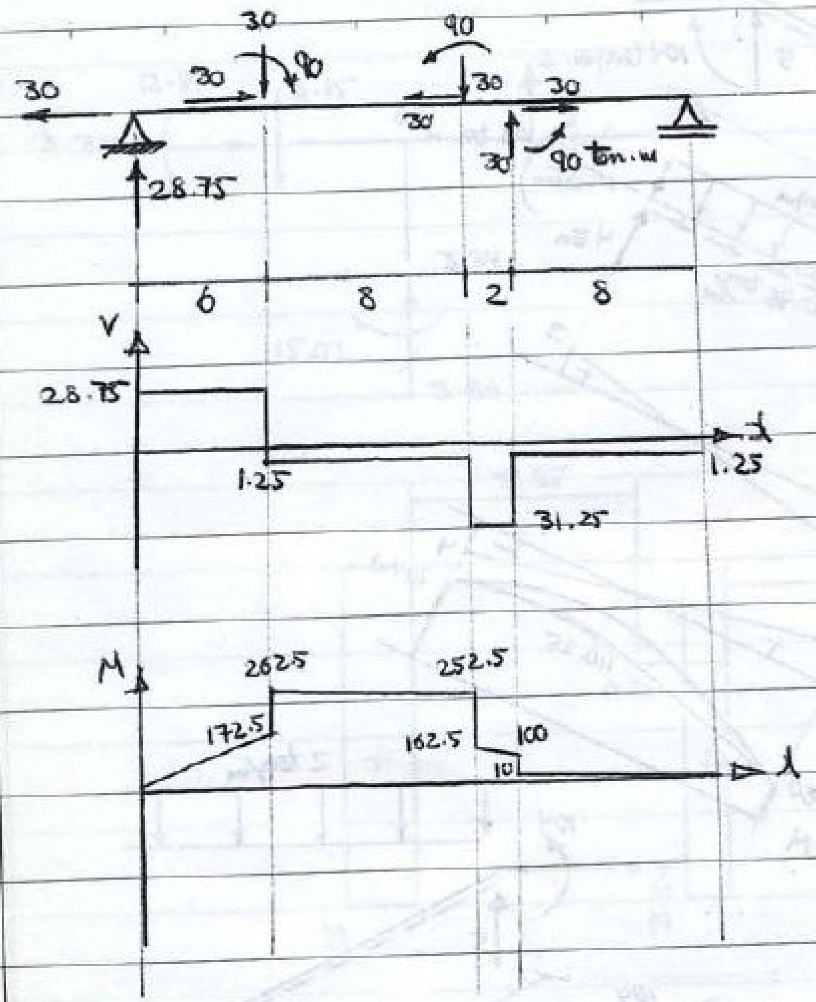


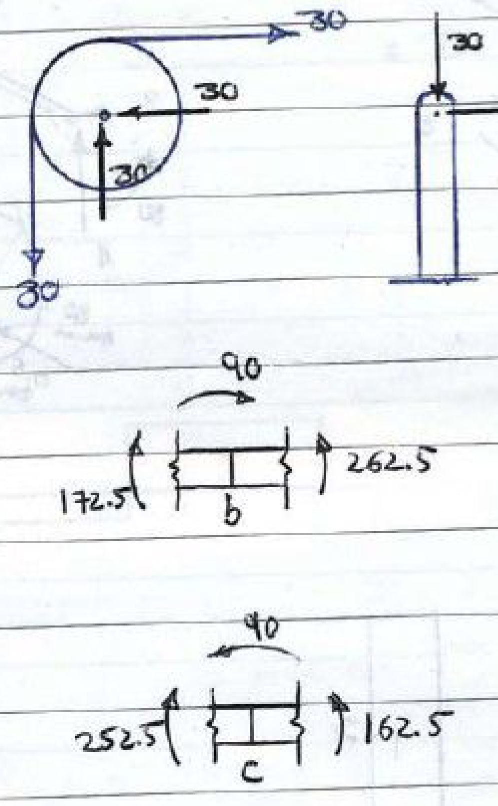




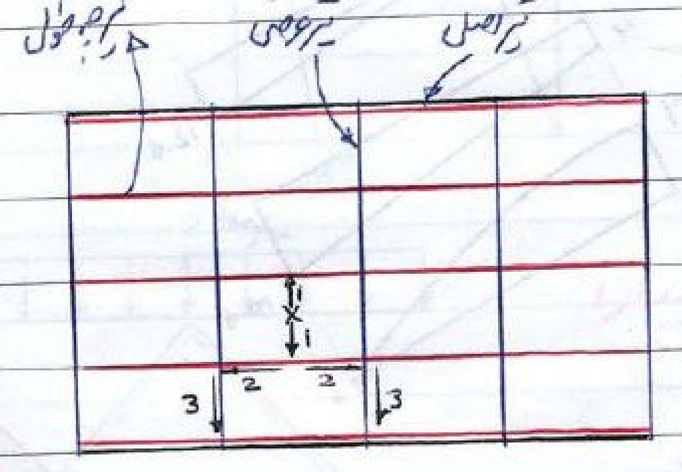
وحه دلنر تیر ز 8

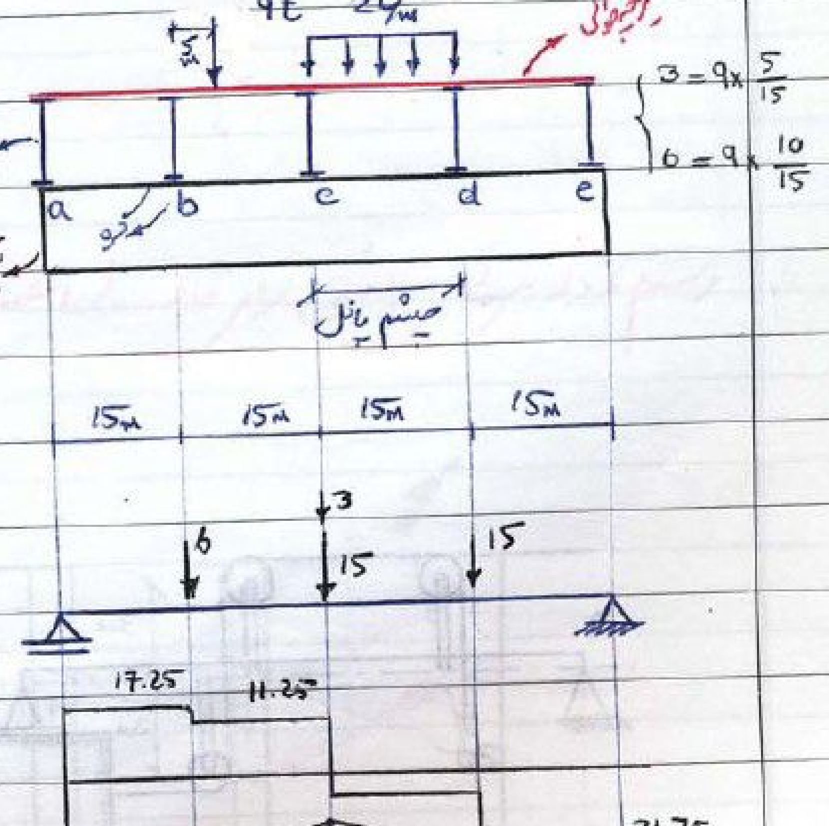






تیرهای اصلی: در تیرریزی کف که وقتی دهانه بزرگ باشد قرار دادن بارها مستقیماً بر روی تیرها باعث می‌شود که تیر بسیار غیر اقتصادی گردد. از این نظر در سیستم کف از تیرهای عرضی و تیرچه‌های طولی در کنار تیرهای اصلی استفاده می‌گردد. چنین کاری در طراحی پل مرسوم است.





نکته: بر تیر اصلی بار فقط از طریق گره‌ها اعمال می‌شود

نکته: برش در هر چشمه ثابت است. لنگر حداکثر در محل گره رخ می‌دهد

فصل سوم

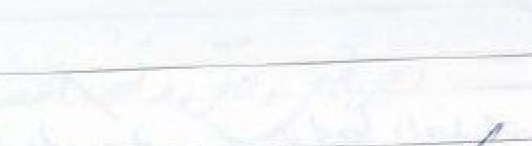
حمید کاظم

خرپاها (TRUSS)

خرپا سازه ای است که بین دو نقطه دهانه زده و بار را با سازوکار بدون خمش به تکیه گاه های خود منتقل می نماید. سازه ای نسبتاً قدیمی است و اول توسط معمار ایتالیایی (آقای پالادیو) ابداع شد. در طرح ها و نقاشی های رسمی مانده از پالادیو در قرن شانزدهم سازه های چوبی مشابه خرپا به تعداد زیاد دیده می شود.

از لحاظ سازه ای خرپا مجموعه ای از اعضای دوسر مفصل می باشد.

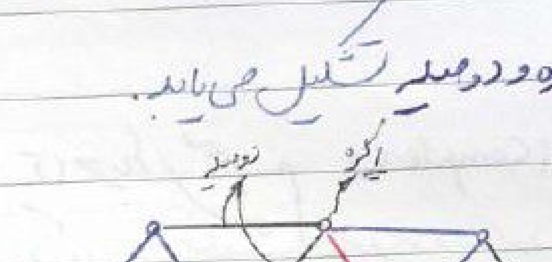
نحوه تشکیل خرپاها: وقتی که مجموعه ای از اعضای دوسر مفصل را در کنار همدیگر قرار دهیم ساده ترین حالت پایدار یک مثلث می باشد که به آن خرپای پایه ای خرپا می گویند. ملاحظه می گردد که اگر تعداد اعضای مفصل شده به هم بیش از ۳ باشد، ترکیب حاصل ناپایدار خواهد بود.



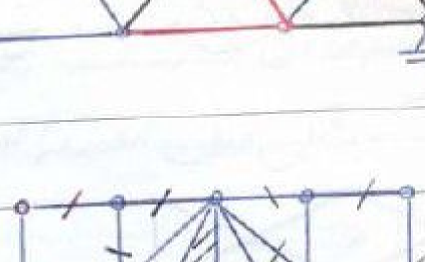
با رشد مثلث پایه یا الحاق مثلث ها از قوانین ترکیب اجسام صلب می توان انواع خرپاها را دست یافت.

طبقه بندی خرپاها بر اساس نحوه تشکیل

۱) خرپاهای ساده: خرپایی را گویند که از رشد مثلث پایه یک گره و دو میله تشکیل می یابد.
خرپاهای ساده از نظر داخلی پایدار و معین می باشد.

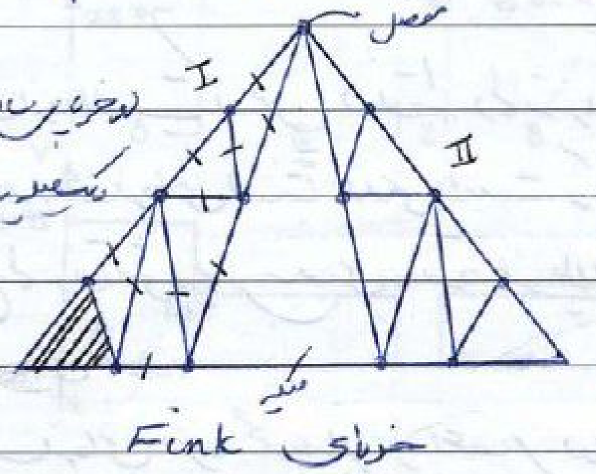


برای اثبات خرپای ساده خرپای مثلثی مبنا را فرض می کنیم و سپس دو میله یک گره را بررسی می کنیم

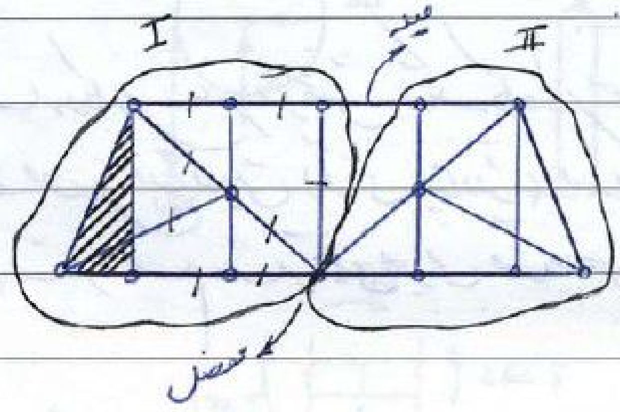


۲) خرپای مرکب: خرپاهای مرکب از ترکیب دو یا چند خرپای ساده به کمک قوانین ترکیب اجسام صلب تشکیل می‌یابد.

دو خرپای ساده با یک مفصل و یک عضو پایدار شده اند



خرپای Fink

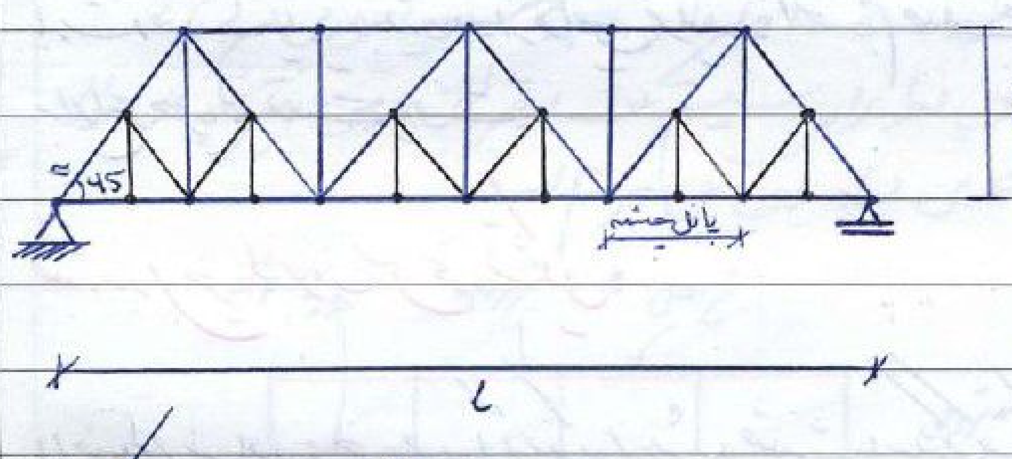


خرپاهای مرکب نیز از لحاظ داخلی معین و پایدارند.

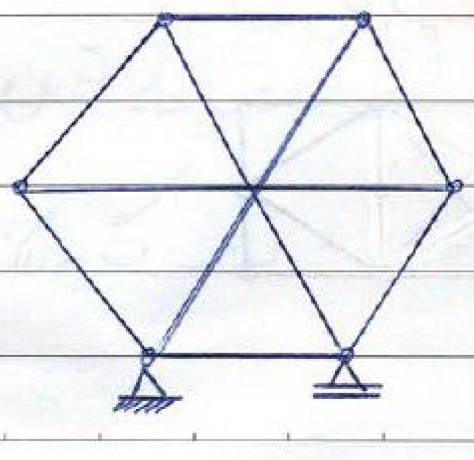
۳) خرپای تقسیم شده: مثالی از خرپاهای ساده هستند که در آن به علت بزرگی چشمه‌ها سعی می‌شود طول چشمه تقسیم شده و کوچک‌تر گردد. معمولاً در خرپاهای پل سازی یا دهانه‌های بلند مورد استفاده دارد.

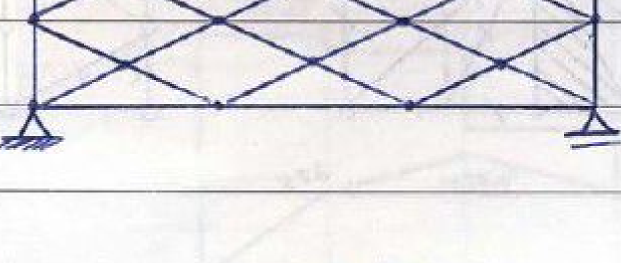
برای کم کردن طول چشمه از عضوهای فرعی و ثانویه استفاده می‌کنند.

$\frac{1}{10}$ تا $\frac{1}{6}\,l$



۴) خرپای مجهم (Complex): مجموعه‌ای از اعضای دو سر مفصل می‌باشند که پایدار هستند. لکن در آن‌ها مثلث پایه وجود ندارد. پایداری آن‌ها (تشخیص) به کمک روش‌های هندسی امکان‌پذیر نیست و با روش‌هایی که در قسمت‌های دیگر مورد بحث قرار می‌گیرد بررسی می‌شود.

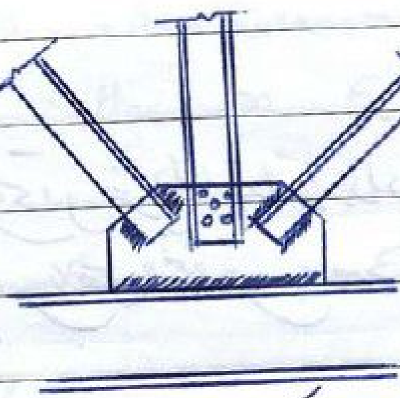


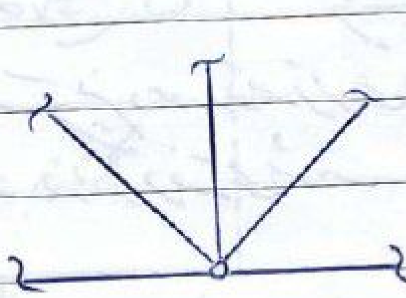


مفروضات اولیه تحلیل خرپاها: برای اینکه بتوان خرپایی را با اصول استاتیک (سه رابطه تعادل) تحلیل نمود باید مفروضات زیر را در آن انجام دهیم.

خرپاهای واقعی دارای تمام این خصوصیات نیستند. لیکن اگر مفروضات را بتوانند باعث سادگی کار شده و همچنین نتایج حاصله اختلاف زیادی با تحلیل دقیق نداشته باشد می توان از این مفروضات استفاده نمود و تحلیل خرپاها را بسیار ساده نمود.

1) اعضای خرپا در انتها به همدیگر لولا شده و اصطکاک در لولا صفر است. در خرپاهای واقعی نه تنها اعضا در انتها به هم لولا نمی شوند، بلکه حتی به همدیگر جوش نیز می گردند. این اتصال شرایط لولا بدون اصطکاک ندارد.





اتصالات واقعی نه تنها لولایی نیستند بلکه صلب می باشند. تحلیل واقعی نشان می دهد که در اعضای خرپا، علاوه بر نیروی محوری، لنگر خمشی نیز در انتها ایجاد می شود. به این لنگرها، لنگرهای ثانوی گویند. تجربیات عملی نشان می دهد وقتی که ارتفاع خرپا در حدود 0.1 تا 0.6 دهانه باشد و زوایای قطری ها در حدود 45° باشد مقدار لنگرهای ثانوی کوچک بوده و نیروی محوری خرپای ایده آل بسیار نزدیک به خرپای واقعی خواهد بود. پس با این شرط فرض مدلسازی لولایی گره ها را می پذیریم.

2) اعضای خرپا مستقیم می باشند (اگر نباشد نیروی محوری لنگر می سازد)

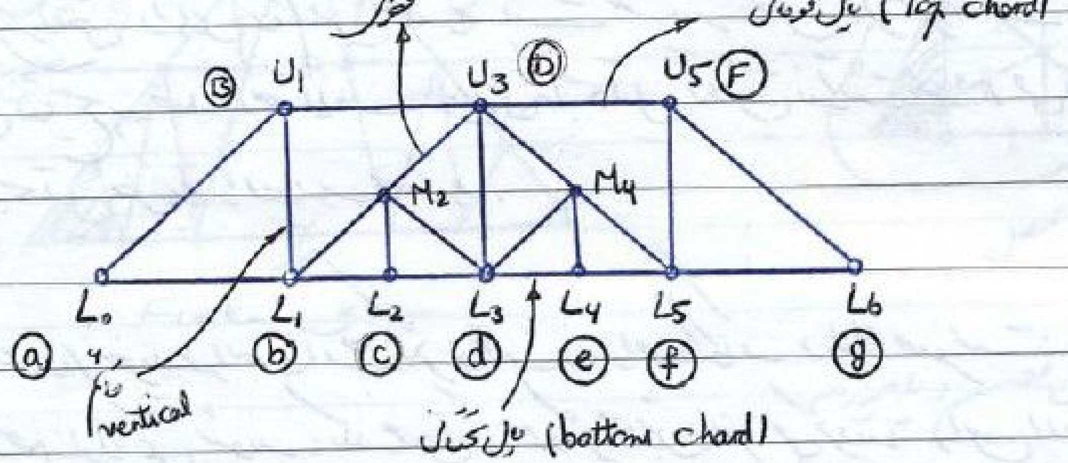
3) نیروهای خارجی و تکیه گاهی در گره ها اعمال می شوند. در عمل تأمین این شرط بسیار ساده است. تنها نقطه ابهام وزن اعضای خرپاست که به صورت گسترده در طول عضو قرار دارد. در عمل وزن اعضا را به صورت دو بار متمرکز در دو انتها اعمال می کنیم.

تغییر شکل های خرپا کوچک هستند. هندسه خرپای تغییر شکل یافته با حالت اولیه آن اختلاف چندانی ندارد.

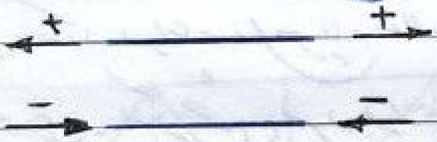
نتیجه مفروضات فوق: اعضای خرپا 2 نیرویی می باشند و در آن ها فقط نیروهای محوری ایجاد می گردد. نیروی محوری می تواند کششی باشد. در این صورت با علامت مثبت نمایش می دهند و اگر فشاری باشد

با هم تشکیل می دهند

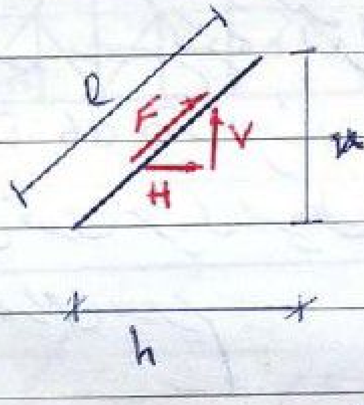
نامگذاری اعضای خرپا



برای تحلیل خرپاها ابتدا قرارداد علامت نیروی عضو را تصمیم می گیرند. نیروهای داخلی کششی با علامت + و نیروهای داخلی فشاری با علامت − در نظر گرفته می شوند



ارتباط بین مولفه های نیروی عضو



$$\frac{F}{l} = \frac{H}{h} = \frac{V}{v}$$

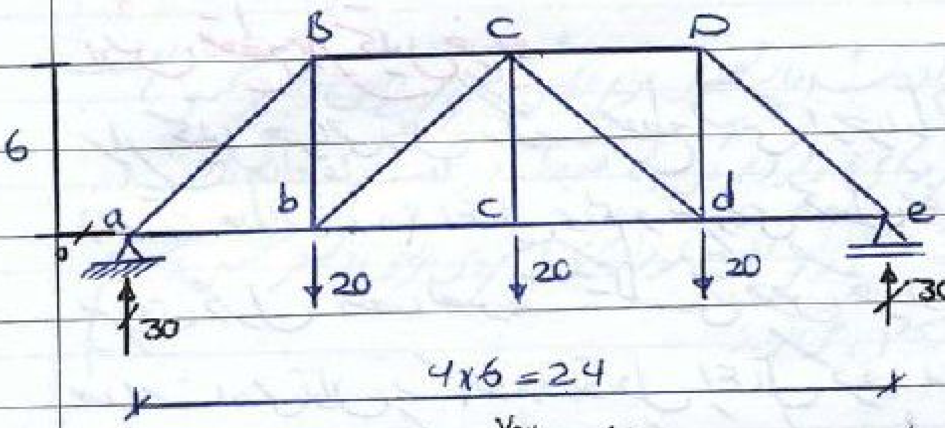
روش گره برای تحلیل خرپا

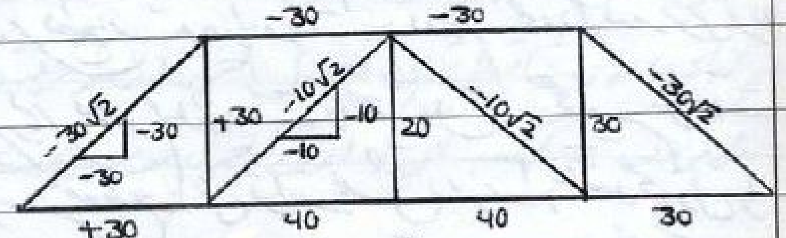
در روش گره برای تحلیل خرپا، ابتدا واکنش های تکیه گاهی محاسبه می گردد سپس گره های خرپا بصورت مجزا آزاد شده و نمودار آزاد آن ها رسم می گردد. در این نمودار آزاد نیروهای معلوم در جهت واقعی و نیروهای مجهول اعضا بصورت کششی نمایش داده می شوند. سپس معادلات تعادل را برای هر گره اعمال می کنیم. با توجه به اینکه نیروها متقارب هستند دو معادله تعادل بیشتر نخواهیم داشت.

$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$

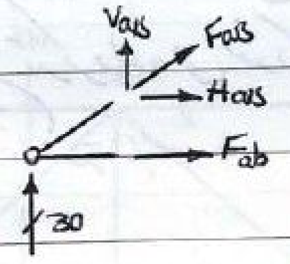
بنابراین باید گره ای را آزاد نمائیم که دو مجهول بیشتر نداشته باشد. همچنین توصیه می شود تا حد ممکن این کار را تا جایی ادامه داد که با استفاده از روش معادلات تعادل اقدام به تعیین نیروها نمائید. در حالات متعددی این موضوع امکان پذیر می باشد.

مثال: خرپای نشان داده شده در شکل را تحلیل نمایید.

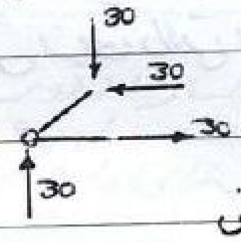




گره a :



گره a :



روش استاتیک ذهنی

$\Sigma F_y = 0 \quad +30 + V_{aB} = 0 \longrightarrow V_{aB} = -30\,\text{ton}$

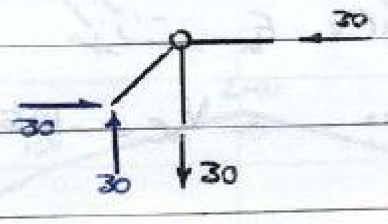
$H_{aB} = -30 \quad F_{aB} = -30\sqrt{2}$ فشاری

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_{ab} + H_{aB} = 0$

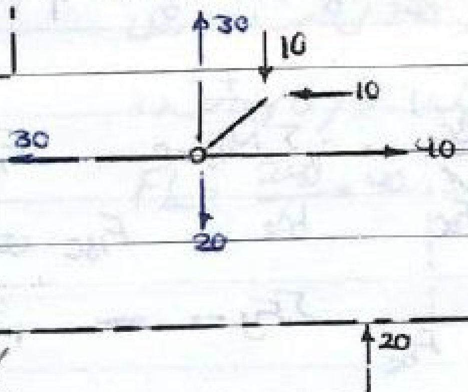
$\longrightarrow F_{ab} - 30 = 0 \longrightarrow F_{ab} = 30$ کششی

* روش استاتیک ذهنی وقتی قابل استفاده است که در گره 2 معادله 2 مجهولی نداشته باشیم.

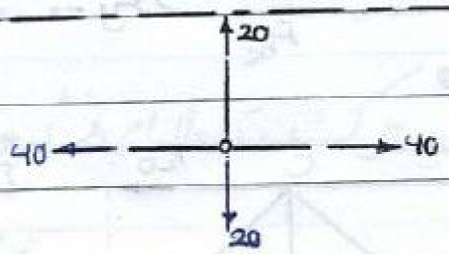
گره B :



گره b :



گره c (کوچک) :



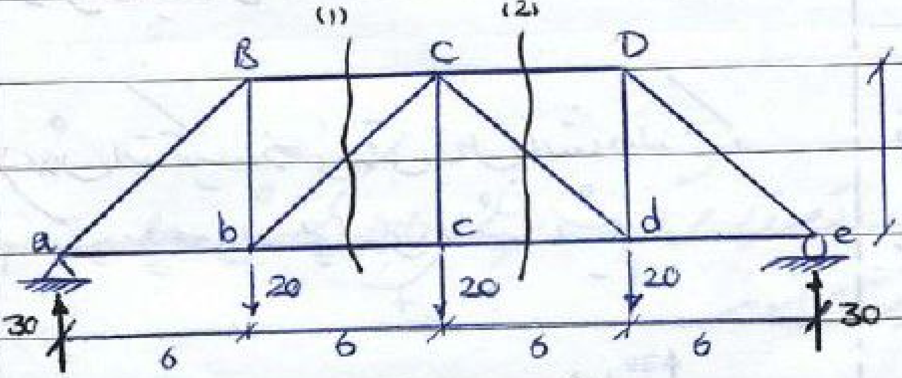
* بقیه اعضا را توسط تقارن می توان بدست آورد.

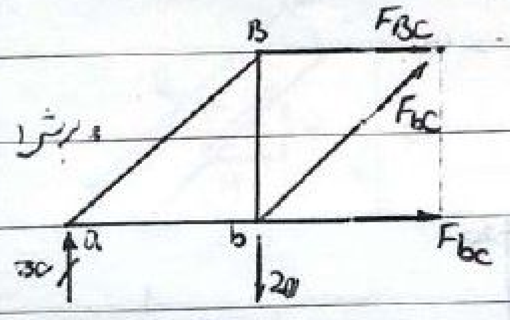
مرکز گشتاور نیرو به نقطه ای گفته می شود که وقتی نسبت به آن ممان می گیریم تنها آن نیروی مجهول باقی بماند.

روش مقطع برای تحلیل خرپا

برای تحلیل خرپا می توان به کمک مقطع قسمتی از خرپا را از بقیه قسمت ها جدا نماییم و معادلات تعادل را بر آن (قسمت جدا شده) اعمال نماییم و نیروهای مجهول اعضای قطع شده را بدست آوریم. معمولاً فرض می گردد نیروهای مجهول اعضا بصورت کششی فرض گردد و نیروهای معلوم در جهت واقعی شان. همچنین بر قسمت جدا شده می توان ۳ معادله تعادل را اعمال کرد. بنابراین مقطع ها نمی توانند بیش از ۳ عضو مجهول را قطع نمایند. همچنین تذکر داده می شود که در هنگام نوشتن معادلات تعادل از معادلاتی استفاده کنیم که بیش از یک مجهول نداشته باشد.

مثال: خرپای نشان داده شده در شکل مقابل را به روش مقطع تحلیل نمایید.

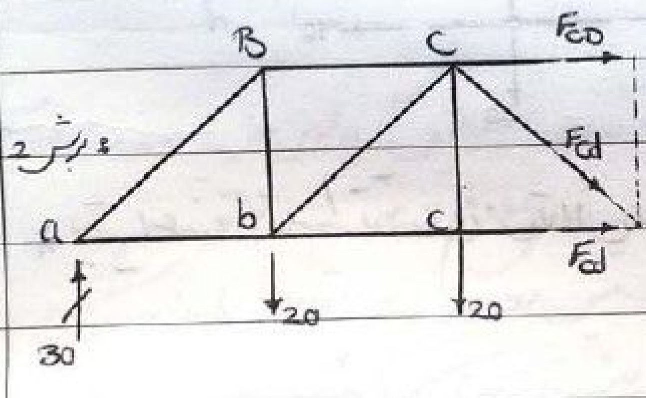




$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \Sigma M_b = 0 \quad -F_{BC} \times 6 - 30 \times 60 = 0 \rightarrow F_{BC} = -30\ \text{ton}$

b : مرکز گشتاور F_{BC} ، C : مرکز گشتاور F_{bc}

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow +30 - 20 + V_{bC} = 0 \rightarrow V_{bC} = -10\ \text{ton}$



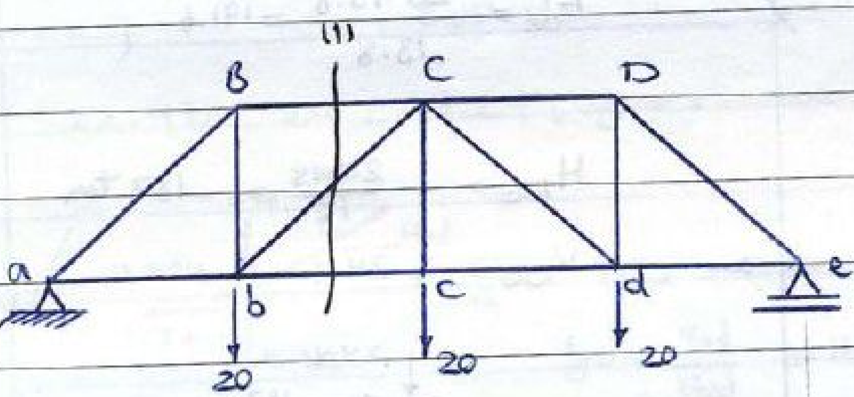
$\overset{+}{\curvearrowleft}\ \underset{C}{\Sigma M} = 0 \quad F_{cd} \times 6 + 20 \times 6 - 30 \times 12 = 0 \rightarrow F_{cd} = 40\ \text{ton}$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow +30 - 20 - 20 + V_{Cd} = 0 \rightarrow V_{Cd} = 10\ \text{ton}$

روش نیروی برشی و لنگر خمشی

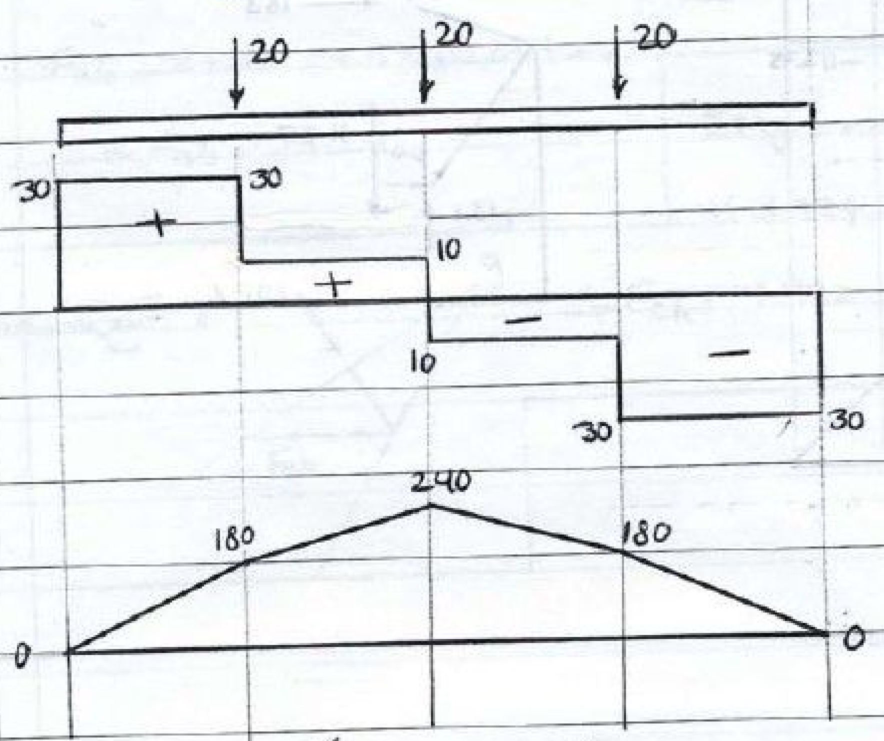
توضیحی که در قسمت قبل برای روش مقطع داده شد با کمی تحول برای روش نیروی برشی و لنگر خمشی است. این روش در خرپاهایی قابل استفاده است که نیروهای وارد بر آن که فقط در امتداد قائم باشد. در این روش ابتدا تیری معادل خرپا در نظر گرفته شده و برای آن نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی رسم می‌گردد. به کمک این دو نمودار خرپا تجزیه و تحلیل می‌گردد.

مثال: خرپای نشان داده شده در شکل را به روش نیروی برشی و لنگر خمشی تحلیل کنید.



$$F_{bc} = \frac{240}{6} = 40$$

$$F_{BC} = \frac{180}{6} = -30$$

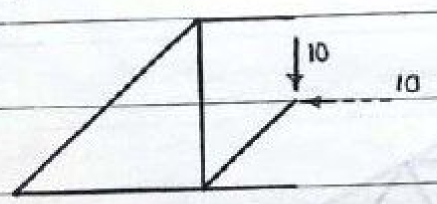


نقطه C (بزرگ) مرکز گشتاور F_{bc} می‌باشد و چون در نمودار لنگر خمشی دارای لنگر 240 می‌باشد و بازوی F_{bc} نسبت به نقطه C (بزرگ) برابر 6 می‌باشد پس:

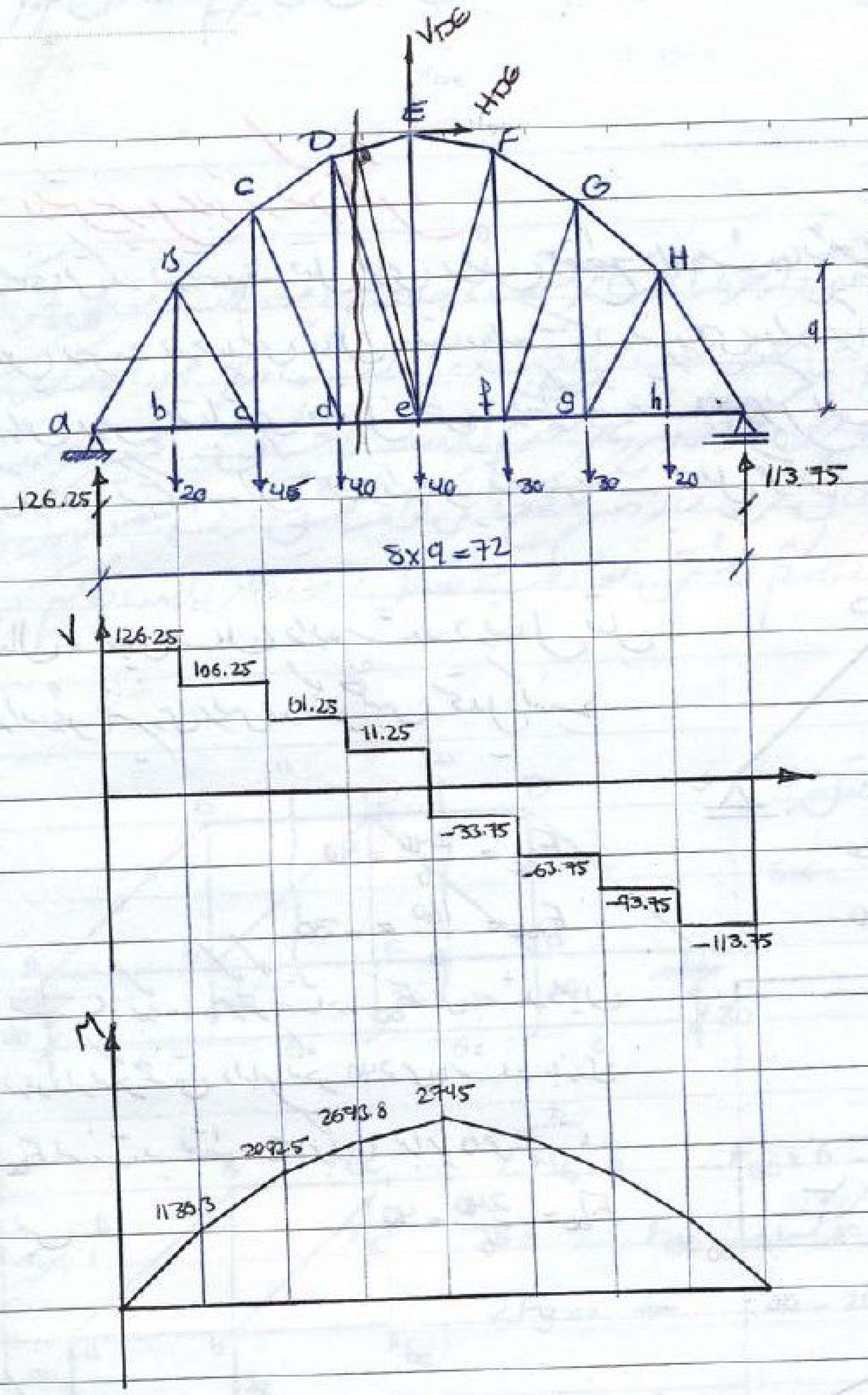
$$F_{bc} = \frac{240}{6} = 40$$

* لنگر مثبت تار پایین را می‌کشد و تار بالا را می‌فشارد.

با استفاده از نمودار نیروی برشی می‌توان مولفه قائم کلیه اعضای قطری را بدست آورد. مقطع (1) را که در آن عضو قطری Cb قطع شده را در نظر می‌گیریم. طبق قرارداد نیروی برشی، چون در مقطع (1) نیروی برشی مثبت است، پس جهت نیروی برشی مقاوم در مقطع قسمت سمت چپ به سمت پایین می‌باشد. بنابراین مولفه قائم نیروی عضوی قائم Cb به سمت پایین و مساوی 10 تن است.



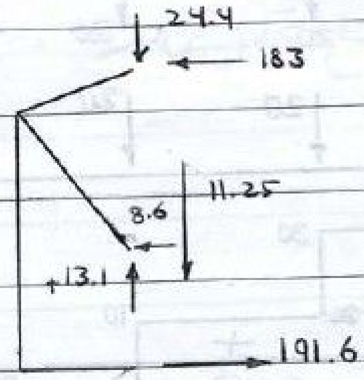
مثال: خرپای مقابل را تحلیل کنید

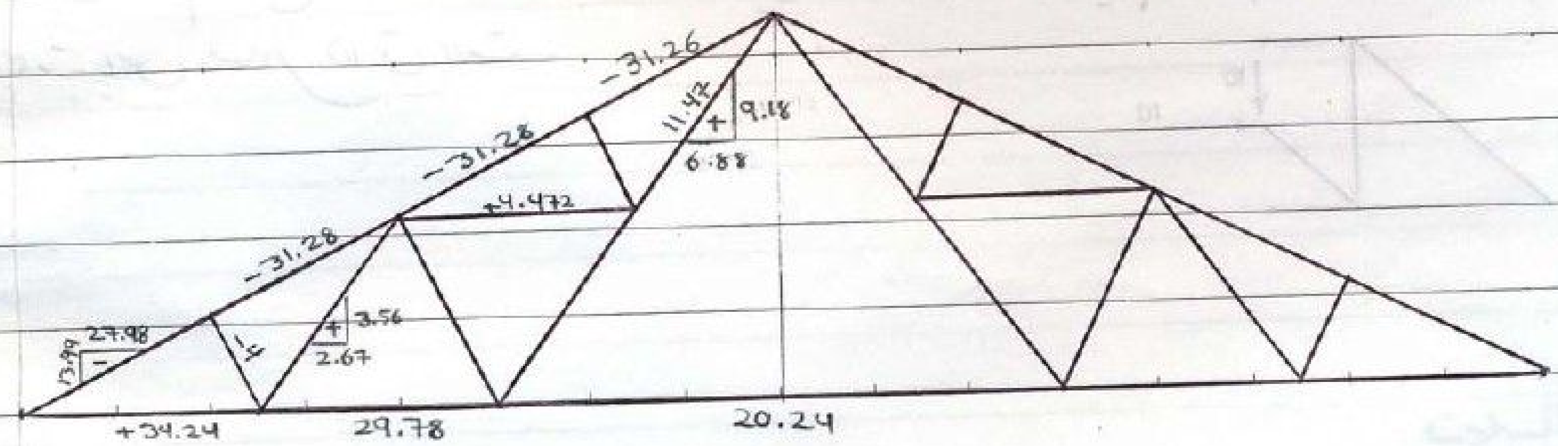


$$F_{de} = \frac{2643.8}{13.8} = 191.6$$

$$H_{DE} = -\frac{2745}{15} = -183 \text{ ton}$$

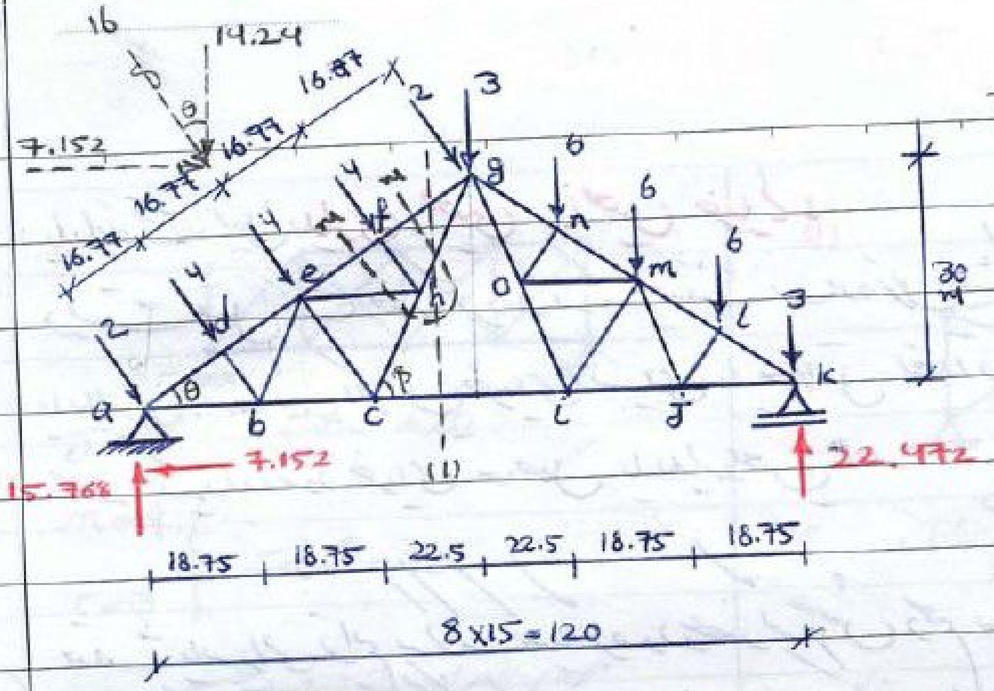
$$V_{DE} = -24.4$$





$tg\theta = \frac{1}{2}$ $\sin\theta = 0.447$ $C\theta = 0.89$

مثال



$\Sigma M_a = 0$

$\rightarrow 4(16.77) + 4(2\times16.77) + 4(3\times16.77)$

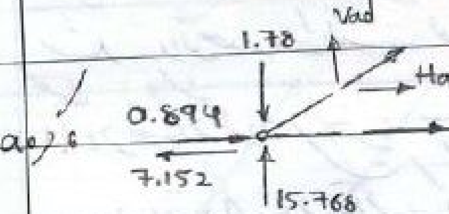
$+ 2(4\times16.77) + 3(4\times15) + 6(5\times15)$

$+ 6(6\times15) + 6(7\times15) + 3(8\times15)$

$= 8\times15\, K_y \qquad K_y = 22.472$

$22.472 - 24 - 14.24 + a_y = 0 \rightarrow a_y = 15.768 \qquad a_x = 7.152$

a گره :



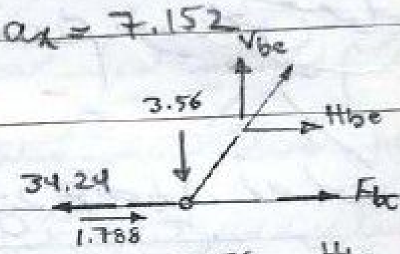
$V_{ad} = -13.99$

$tg\theta = \frac{V_{ad}}{H_{ad}} \rightarrow H_{ad} = -27.98$

$F_{ab} - 27.98 - 7.152 + 0.894 = 0$

$\rightarrow F_{ab} = 34.24$

b گره :



$V_{be} = 3.56 \qquad \frac{3.56}{15} = \frac{H_{be}}{11.25}$

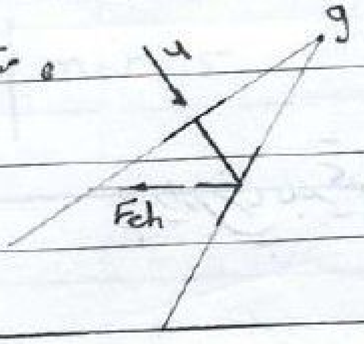
$H_{be} = 2.67 \quad F_{bc} = 29.78$

$\Sigma M_g = 0$

$4(16.77) - F_{eh}(15) = 0$

$\rightarrow F_{eh} = 4.472$

m-m مقطع :



برش ۱ : $\Sigma M_g = 0$

$4(16.77) + 4(2\times16.77) + 4(3\times16.77)$

$+ 2(4\times16.77) - 7.152(30)$

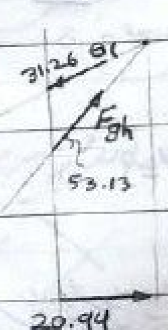
$- 15.768(60) + F_{ci}(30) = 0$

$\rightarrow F_{ci} = 20.24$

$\Sigma M_c = 0$

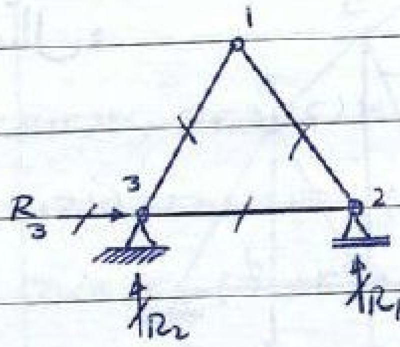
$2(2\times16.77) - 15.768(2\times18.75)$

$- F_{fg}(16.77) = 0 \rightarrow F_{fg} = -31.26$



$F_{gh}(C53.13) + 20.94 = 31.26(0.89)$

پایداری و ناپایداری، معین و نامعین خرپاها



در قسمت قبل نشان داده گردید که یک مثلث ساده‌ترین شکل خرپای پایدار می‌باشد. اگر این خرپای مبنا با حداقل تعداد موانع که در صفحه تکیه داده شود خرپای حاصل پایدار و معین است.

مثلث پایه را می‌توانیم به کمک یک گره و دو عضو گسترش دهیم بدون اینکه در پایداری و معینی آن تغییری در گره حاصل آید. بدون اینکه گره‌ای به خرپا اضافه کنیم، عضوی به خرپا اضافه می‌کنیم خرپا نامعین خواهد شد. با توجه به مطالب گفته شده می‌توانیم این‌طور نتیجه‌گیری نماییم.

۱) اگر تعداد گره‌های خرپا J باشد تعداد معادلات تعادل استاتیکی 2J خواهد بود. توجه شود که ۳ معادله تعادل استاتیکی که برای کل سازه نوشته می‌شود مستقل از 2J معادله نیست.

۲) اگر m تعداد اعضای خرپا و r تعداد موانع تکیه‌گاهی باشد، تعداد مجهولات مساوی m+r خواهد شد. می‌توانیم بنویسیم:

تعداد معادلات $= 2J$ تعداد مجهولات $= m+r$

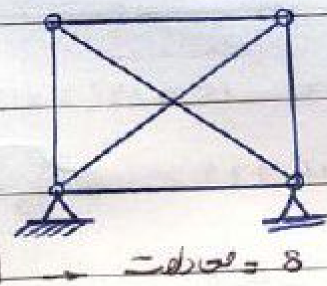
1) $2J > m+r$ خرپا ناپایدار استاتیکی

2) $2J = m+r$ خرپای معین

3) $2J < m+r$ خرپای نامعین

پایداری خرپا باید تحقیق گردد (شرط لازم است ولی کافی نیست)

1)

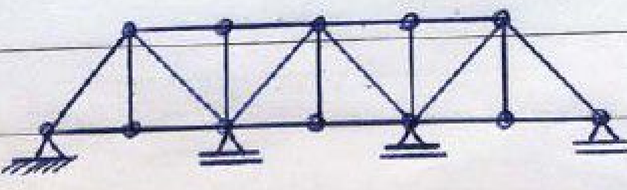


$J=4$ → معادلات $= 8$

$m=6$, $r=3$ → مجهولات $= 9$

خرپای پایدار و یک درجه نامعین

2)

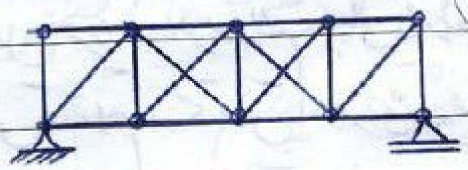


$J=12$ $2J=24$

$m=21$, $r=5$ → $m+r=26$

خرپای پایدار و 2 درجه نامعین خارجی

3)



$J=10$ $\quad$ معادلات $= 20$

$m=19$, $r=3$ $\Big\}$ مجهولات $= 22$

خرپای ناپایدار و 2 درجه نامعین

4)

$J=13$ $\quad 2J=26$

$m=22$, $r=4$ $\Big\}$ $m+r=26$ $\quad$ خرپای ناپایدار و معین

دو جسم توسط یک مفصل و یک مفصل پایدار می‌شوند ولی اینجا فقط یک مفصل بکار رفته که باعث یک درجه ناپایداری گشته است. برای جبران این ناپایداری به جای 3 معادله تکیه‌گاهی از چهار معادله استفاده شده است.

5)

$J=8$ $\quad 2J=16$

$m=12$, $r=3$ $\Big\}$ $m+r=15$ $\quad$ خرپا ناپایدار است.

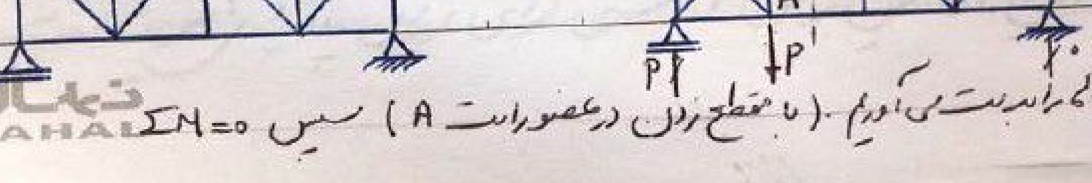
دلایل ناپایداری خرپا:

1) تعداد معادلات $2J$ بزرگتر از $m+r$.

۲) عدم وجود شکل‌های مثلثی. اگر قسمتی از خرپا شکل مثلثی تشکیل نشود می‌تواند نقطه‌ی الحاقی برای ناپایداری خرپا باشد.

۳) تکیه‌گاه‌های ناپایدار نیز می‌توانند دلیلی بر ناپایداری باشند.

٤) استدلال کمی است یعنی اگر بتوانیم ثابت کنیم خرپایی فقط برای یک حالت بارگذاری ناپایدار است می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که آن خرپا ناپایدار است.



J ، m ، r تغییری نکرد

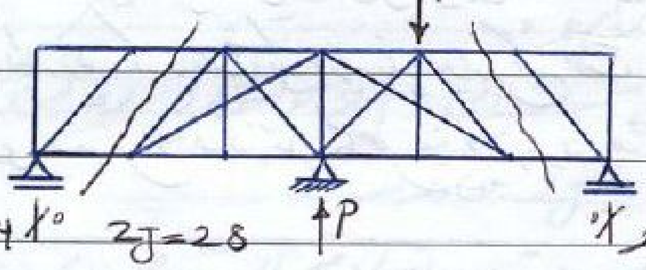
بار P را به A وارد می‌کنیم. تکیه‌گاه‌ها را بدست می‌آوریم. (با مقطع زدن در عضو راست A) سپس $\Sigma M=0$ برقرار نمی‌باشد.

۱۵) تحلیل خرپا. اگر بتوانیم با یکی از روش‌های گفته شده ناپایداری خرپا را نتیجه‌گیری نماییم، برای تشخیص ناپایداری اقدام به تحلیل خرپا می‌نماییم. اگر در حین تحلیل به وجود تناقض برخوردیم، معنی آن این است که خرپا ناپایدار می‌باشد. (نیروی عضو را از دو راه دو عدد متفاوت بدست می‌آوریم.)

در حالت پیشرفته‌تر این روش منجر به روش بار صفر می‌گردد که از آن برای تشخیص ناپایداری خرپاهای مبهم استفاده می‌شود. در قسمت بعد ضمانت عدد مربی قرار می‌گیرد.

مثال‌هایی از استدلال‌های استاتیکی:

1)

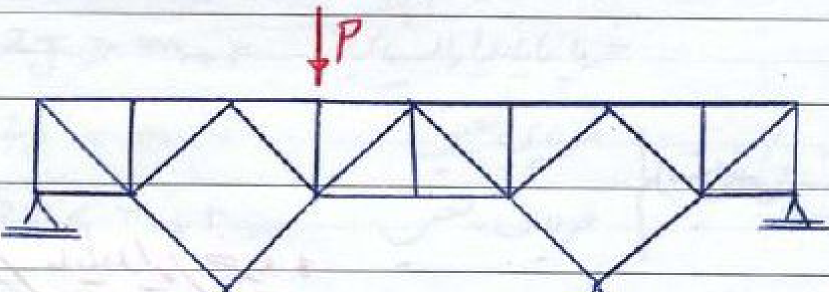


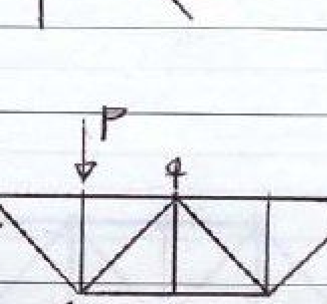
$J=14$ $2J=28$

$m=25$, $r=4$ $\}$ $m+r=29$

اما با روش استدلال استاتیکی با اعمال بار P مشخص می‌شود که $\Sigma M \neq 0$ و خرپا ناپایدار است.

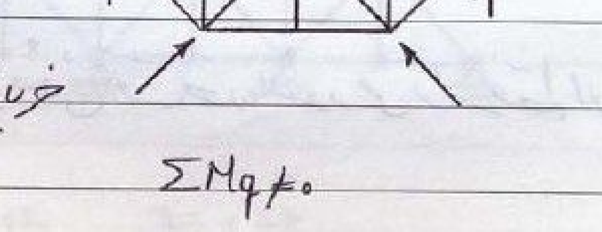
2)





$J=18$ $2J=36$

$m=31$, $r=5$ $\}$ $m+r=36$

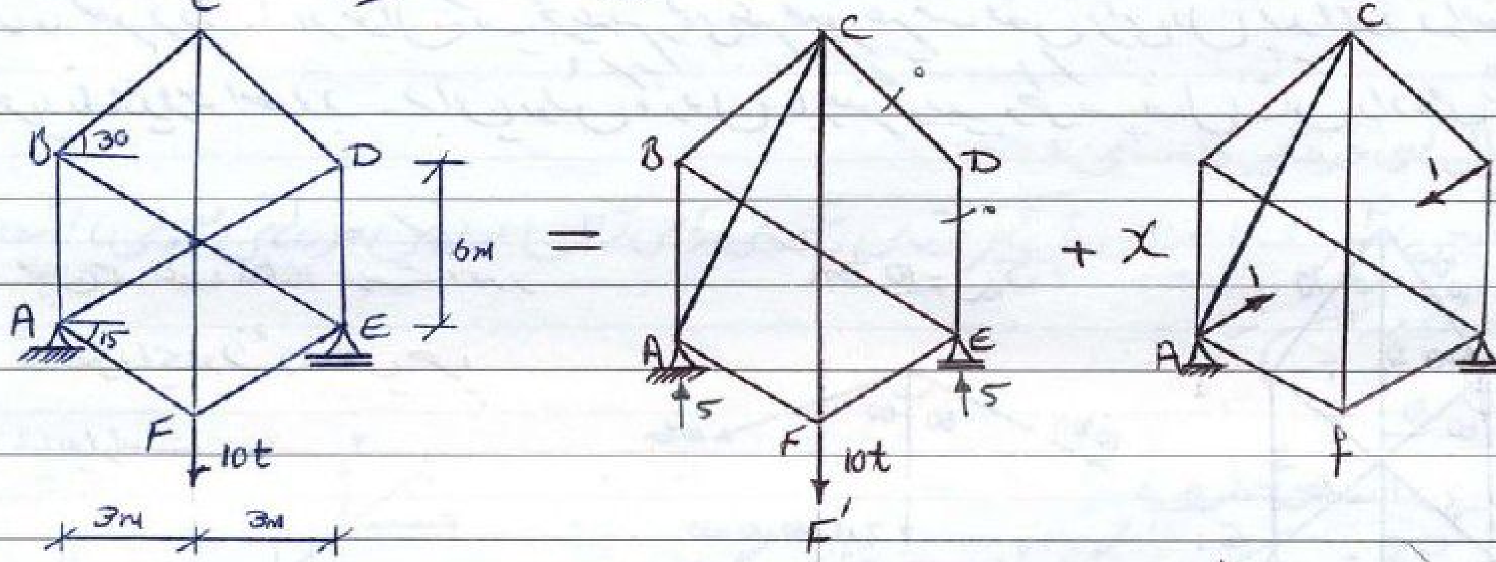


خرپا ناپایدار است.

$\Sigma M_q \neq 0$

تحلیل خرپاهای مبهم: خرپای مبهم را نمی‌توان با روش گره یا مقطع حل نمود، زیرا نمی‌توان گره‌ای با دو مجهول یا مقطعی با سه مجهول در آن پیدا کرد. یک روش این است که تمام گره‌های خرپای مبهم را با یکدیگر به صورت همزمان آزاد نماییم. در این صورت $2J$ معادله همزمان برای تعیین $m+r$ مجهول نیرو خواهیم داشت که از آن مقادیر مجهول بدست می‌آید. حل این معادلات همزمان ممکن

است وقت گیر باشد. روش دوم استفاده از اصل روی هم گذاری است که توسط شخصی به نام هنبرگ پیشنهاد شده است. حل یک مثال به توضیح این روش می‌پردازیم.



	F'	f	$F = F' + xf$
AB	+6.22	-1.382	-26.1
BC	+4.55	-1.01	-19.1
CD	0	-0.816	-19.1
DE	0	-1.115	-26.1
EF	+4.08	-0.91	-17.2
FA	+4.08	-0.91	-17.2
BE	-5.58	+1.24	+23.42
CF	+7.89	+0.471	+18.9
AC	-10.89	+0.465	0

$$F_{AC} = F'_{AC} + x f_{AC} = 0$$

$$-10.89 + 0.465x = 0$$

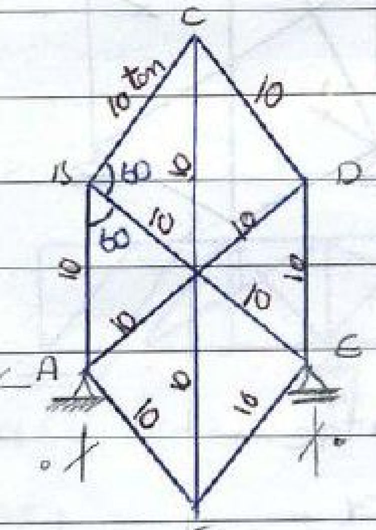
$$x = +23.42$$

$$F_{AD} = 0 + 1 \times x = 23.42\,t$$

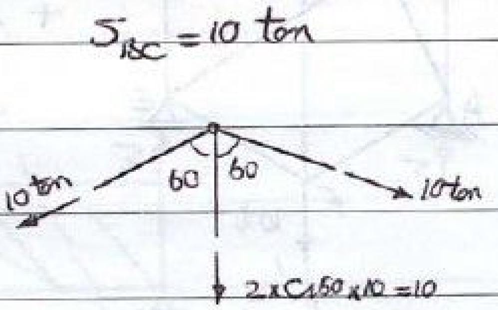
پایداری خرپای مبهم، روش بار صفر

در صورتیکه برای تشکیل یک خرپا (هر نوع خرپا) 2J معادله تشکیل شود از حل این دستگاه نیروهای مجهول اعضا قابل تعیین خواهد بود. این دستگاه وقتی دارای جواب است که دترمینان ضرایب مخالف صفر باشد، بنابراین اگر دترمینان ضرایب مساوی صفر گردد، خرپا ناپایدار بوده و دستگاه دارای جواب نمی‌باشد. این آزمایش روش مناسبی برای بررسی پایداری خرپاها است.

راه می‌توان به طرق دیگری که قابلیت استفاده عمل داشته باشد بیان نمود. بدین معنی که اگر خرپایی تحت تأثیر هیچگونه بار خارجی نباشد تنها حالت تعادل برای آن این است که نیروهای داخلی آن تماماً صفر گردد. اگر بتوان یک مجموعه نیروهای غیر صفر غیر مشخص برای آن پیدا نمود در آن صورت خرپا ناپایدار خواهد بود. برای این روش آزمون بار صفر توضیح و یک مثال نشان داده می‌شود.

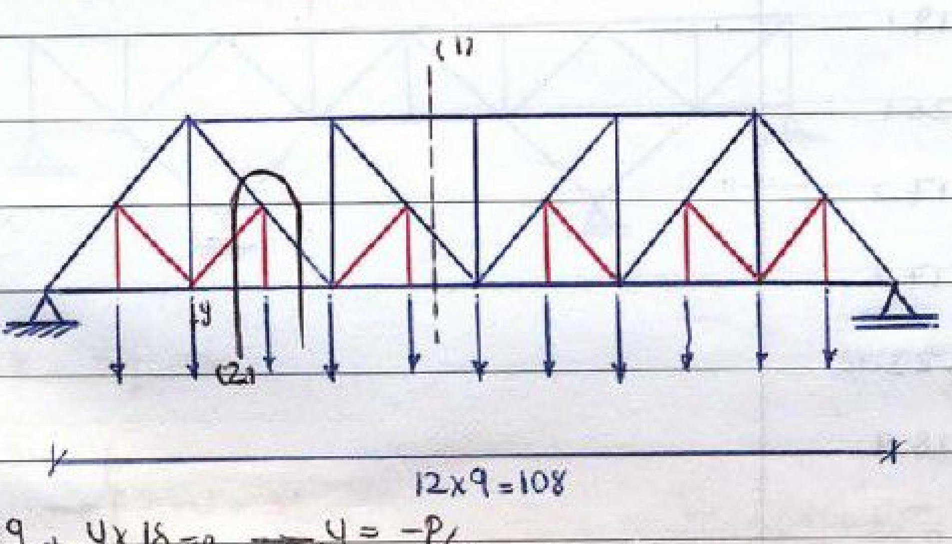


$S_{BC} = 10$ ton



چون که اعضا 10 ton بدست آمد و تناقض ایجاد شده، لذا خرپا ناپایدار است.

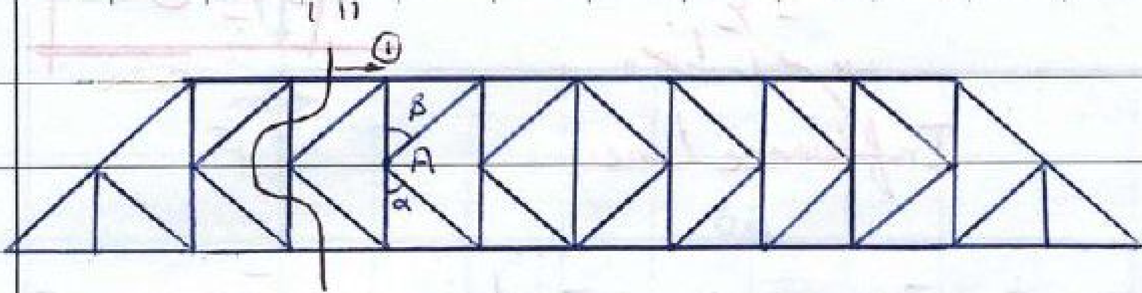
تحلیل خرپای تقسیم شده: تحلیل خرپای تقسیم شده مثل یک خرپای معمولی است. با این تفاوت که باید نیروهای اعضای تقسیم شده را به نحوی تعیین نمود. این کار با یک مقطع امکان‌پذیر است.



برای شکل زیر با یک مقطع (1) می‌توان از طریق لنگرگیری و نیروی برشی نیروی اعضا را بدست آورد.

$$P \times 9 + y \times 18 = 0 \longrightarrow y = -P/2$$

تحلیل خرپای K :

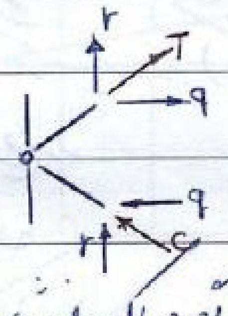


تحلیل بال‌های فوقانی و تحتانی :

با عبور مقطع نظیر ۱-۱ نیروی بال‌های فوقانی و تحتانی را می‌توان به روش خرپاهای معمولی با استفاده از نقطه گشتاور تعیین نمود.

تعیین نیروی اعضای قطری :

$\alpha = \beta$



نمودار آزاد گره A را رسم می‌کنیم. اگر زاویه اعضای قطری با هم مساوی باشند برش چشمه به طور مساوی بین مولفه‌های قائم دو قطری تقسیم خواهد شد. با توجه به شیب مخالف دو قطری اگر در یکی فشاری باشد، در دیگری کششی است.

فصل چهارم:

حمید کاظم

«خط تأثیر»

Influence Line

تا به حال کلیه سازه‌ها فقط تحت بارهایی با موقعیت ثابت مورد توجه قرار گرفت. بارهای وارد بر یک سازه می‌توانند متحرک باشند. مثال خوبی از این موضوع پل‌ها می‌باشند که بارهای زنده وارد بر آن‌ها کامیون‌ها یا خودروهایی است که با سرعت از روی آن عبور می‌نمایند. همچنین وضعی را می‌توان به طور آرام‌تر در یک بار متحرک نیز مشاهده نمود. حال به جابجا شدن بارهای زنده که یک بار متحرک از محلی به محل دیگر است، هدف این مطالعه است.

مقدار یک تابع مشخص از یک سازه (واکنش تکیه‌گاهی، نیروهای داخلی و حتی تغییر شکل که یک تابع از سازه می‌باشد) بستگی به عوامل زیر دارد.

۱) مقدار بار وارده

۲) موقعیت بار وارده

۳) محل مورد نظر برای مطالعه تابع

با یک جمع‌بندی یک مهندس آلمانی به نام وینکلر (Winkler) ایده‌ای ابداع نمود که این بررسی به جای ۳ متغیر با یک متغیر تنها انجام شود.

۱) هر بار فقط یک تابع مشخص بررسی شود.

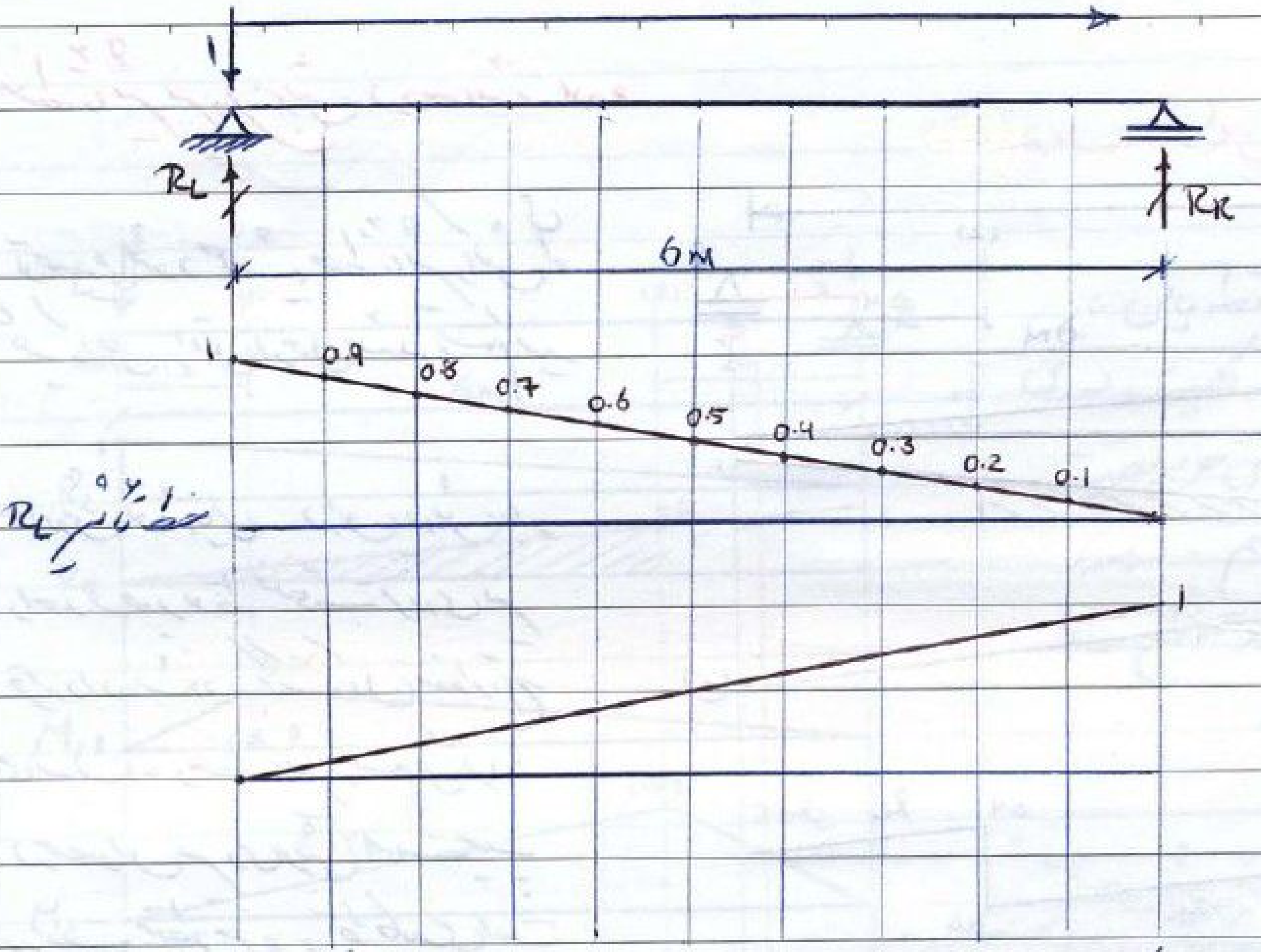
۲) مقدار بار را واحد در نظر بگیرید.

۳) موقعیت بار واحد می‌تواند متغیر باشد.

نموداری که تغییرات تابع را برحسب موقعیت بار واحد نشان دهد خط تأثیر نامیده می‌شود.

رسم خط تأثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی یک تیر ساده

ساده‌ترین روش رسم خط تأثیر نقطه‌یابی است. یعنی بار واحد را بر روی موقعیت‌های مختلف از روی سازه قرار می‌دهیم و در هر موقعیت مقدار تابع را حساب می‌نماییم و مقدار به دست آمده را به صورت عرض خط تأثیر زیر بار واحد ترسیم می‌دهیم. با کمی پیشرفت در کار با این تکنیک به وجود آید که تعداد نقطه‌یابی‌ها کم گردد.

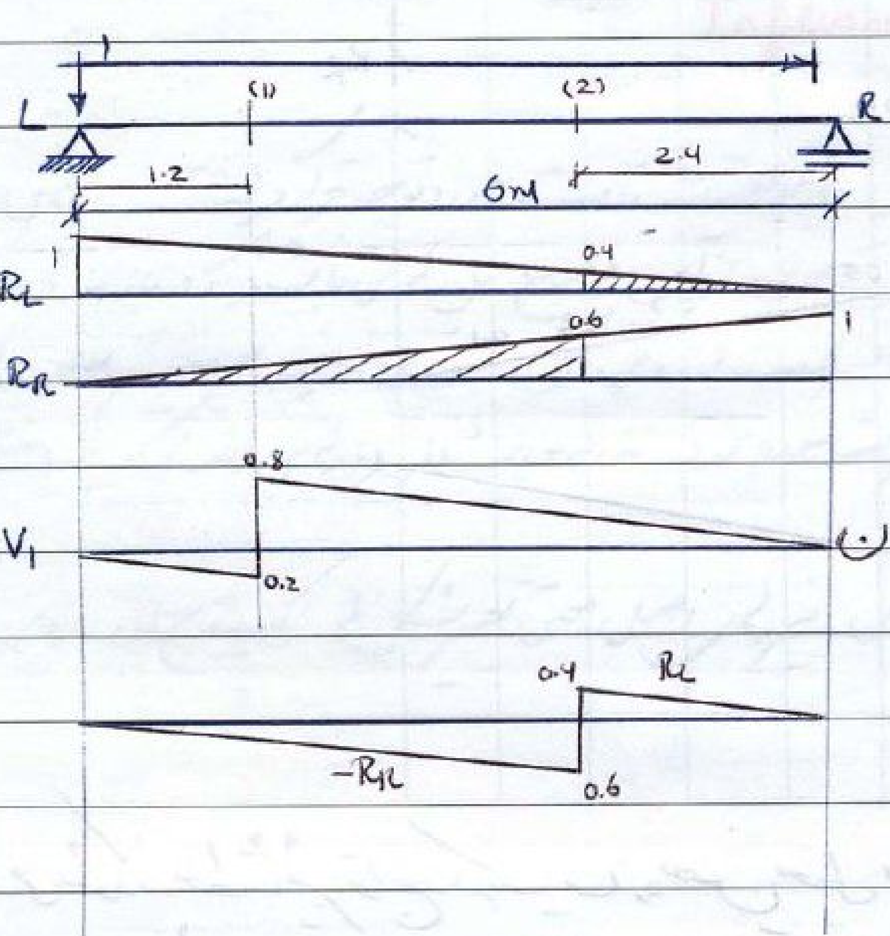


ثابت می‌شود که خط تأثیر توابع در یک سازه معین خطی است. بنابراین فرض می‌کنیم که تعداد نقاط مورد مطالعه زیاد باشد. بنابراین با این نکته این توانایی به وجود آید که بتوانیم با حداقل نقاط خط تأثیر را رسم نماییم. چنین نقاطی را نقاط کلیدی می‌نامیم. یعنی نقاطی که تشخیص می‌دهیم در آنها ناپیوستگی و تغییر ناگهانی در خط تأثیر به وجود می‌آید یا زاویه تغییر دارد. نقاط ابتدا و انتهای سازه، محل واکنش‌های تکیه‌گاهی، لولاهای داخلی نقاطی هستند که می‌توانند برای ناپیوستگی یا تغییر شیب داشته باشند و باید به عنوان نقاط کلیدی مورد بررسی قرار گیرند.

بعد از رسم خط تأثیر کامل توصیه است که نقاط دیگری به عنوان کنترل توجه شود. به عنوان مثال برای رسم خط تأثیر واکنش تکیه‌گاهی سمت راست، یک بار واحد را در نقطه چپ قرار می‌دهیم. واکنش صفر می‌شود. یک بار روی واکنش راست می‌گذاریم مقدار واکنش یک می‌شود. با وصل کردن این دو نقطه نمودار کامل می‌شود.

برای کنترل از نقطه دیگر و $\sum F_y$ استفاده می‌کنیم.

خط تأثیر نیروی برشی در دهانه ساده

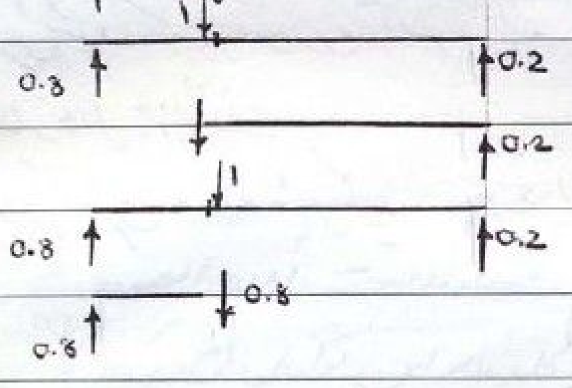


توصیه می‌شود همیشه خط تأثیر واکنش‌ها که پایه‌ی تمامی روابط است از اول مشخص رسم کنید.

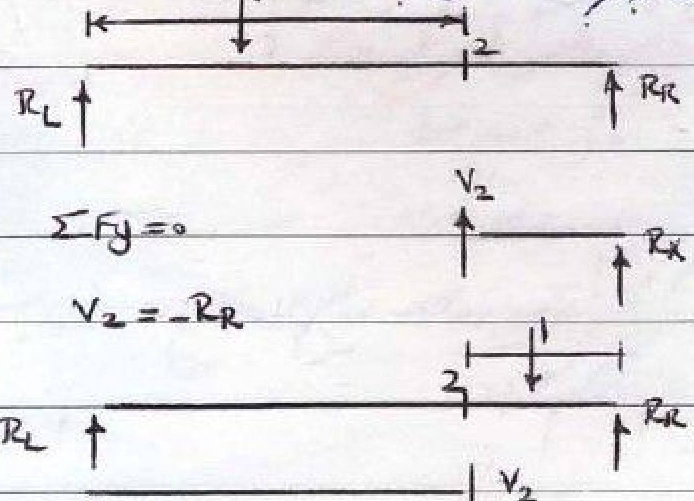
۱) روش نقطه یابی: در این روش بار واحد در چند نقطه مختلف بر روی تیر قرار داده شده و به کمک آن مقدار تابع محاسبه شده و خط تأثیر رسم می‌گردد. در خصوص نیروی برشی سمت چپ و راست مقطع جزء نقاط کلیدی است و بار واحد باید در آن نقاط قرار داده شود.

برای رسم خط تأثیر نیروی برشی مقطع 2 از روش استدلال استاتیکی استفاده می‌نماییم.

این روش می‌تواند در بسیاری از مسائل که گرفته شده به علت سهولت در حل مسائل گردد. در روش استدلال استاتیکی، خط تأثیر مورد نظر را به خطوط تأثیری که قبلاً رسم شده‌اند مربوط می‌نماییم.



مادامی که بار واحد در سمت چپ نقطه 2 قرار دارد نیروی برشی برابر $-R_R$ می‌باشد.



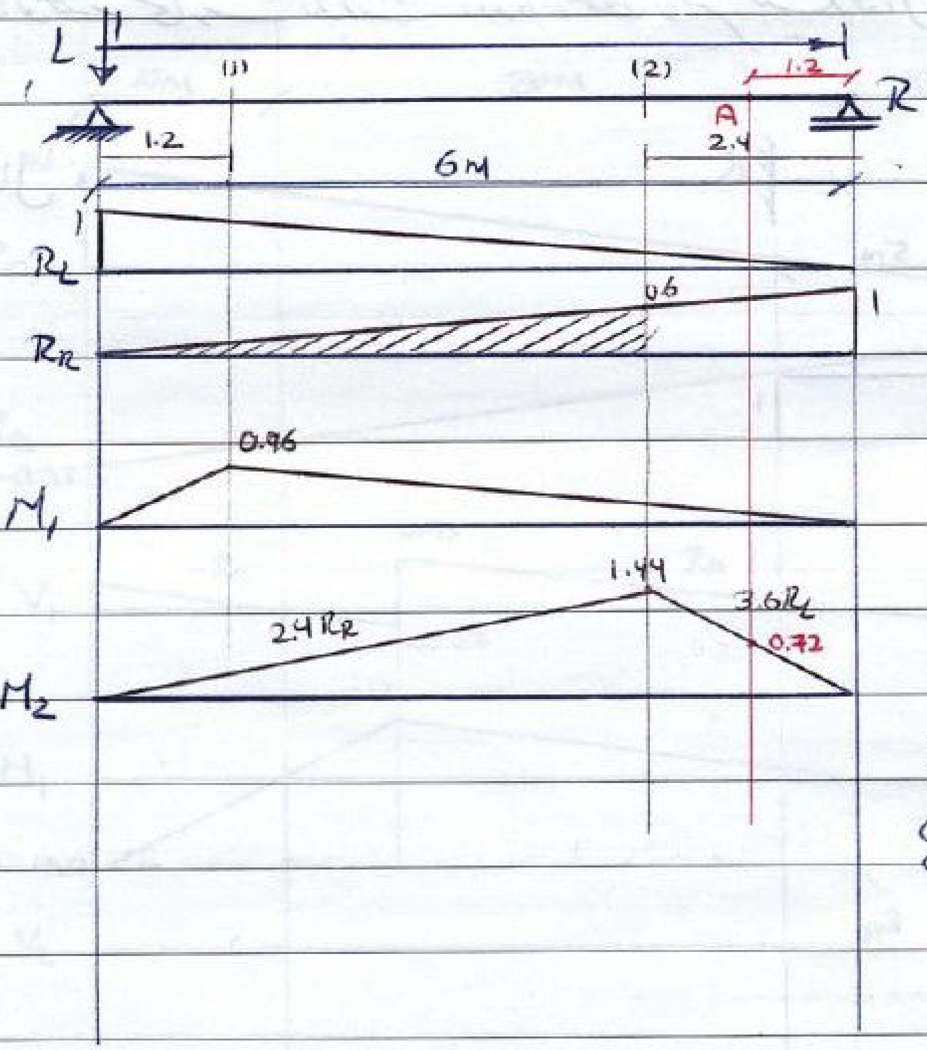
$\Sigma F_y = 0$

$V_2 = -R_R$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow V_2 = R_L$

* بار واحد هر طرف مقطع مورد بررسی بود برای طرف دیگر رابطه تعادل (استدلال استاتیکی) بنویسید.

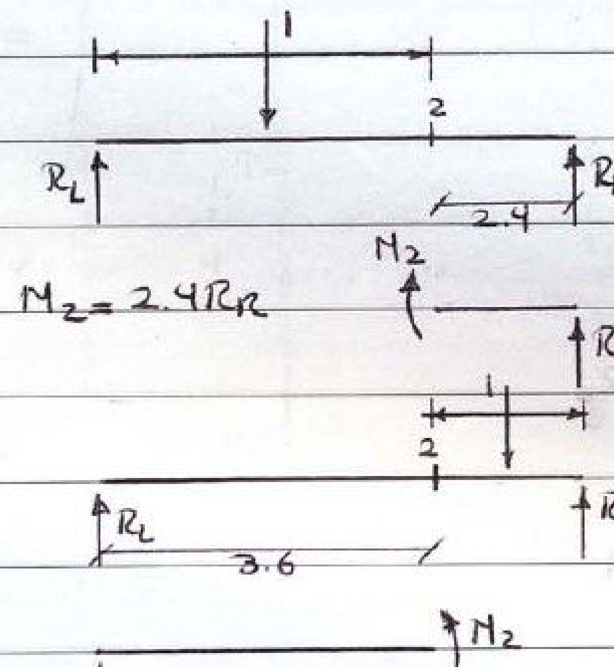
خط تأثیر لنگر خمشی برای دهانه ساده:



۱) نقطه یابی: در روش نقطه یابی بار واحد را در روی چند نقطه کلیدی در روی سازه قرار می دهیم و به ازای هر موقعیت مقدار تابع را محاسبه می کنیم. در مورد لنگر خمشی تکیه گاه ها و محل مقطع نقاط کلیدی می باشند.

۲) استدلال استاتیکی: در این روش مقدار تابع مورد نظر به توابعی مربوط است که خط تأثیر آن ها قبلاً رسم شده است. بهترین توابع واکنش های تکیه گاهی اند.

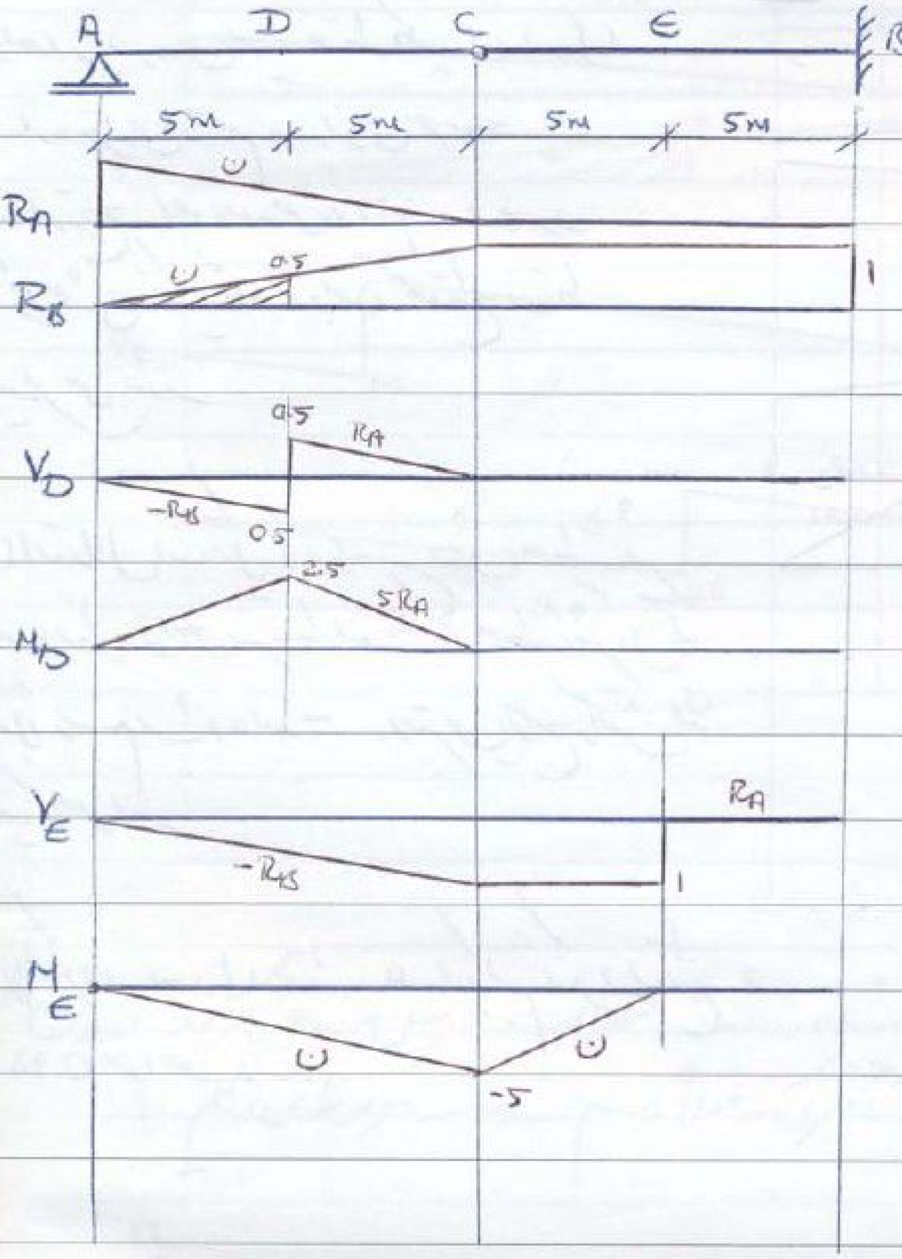
* اگر بار واحد را در نقطه A وارد کنیم لنگر در مقطع 2 0.72 خواهد شد.



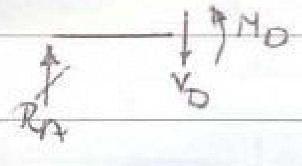
خطوط تاثیر برای تیرهای با اثر الحاقیه که معین هستند

با توجه به نکات به دست آمده، خطوط تاثیر چند مثال ارائه می‌گردد.

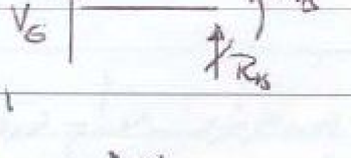
مثال ۱:



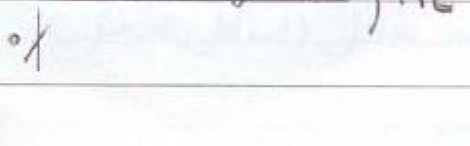
$V_D = -R_B$



$V_D = R_A$ $\quad M_D = 5R_A$

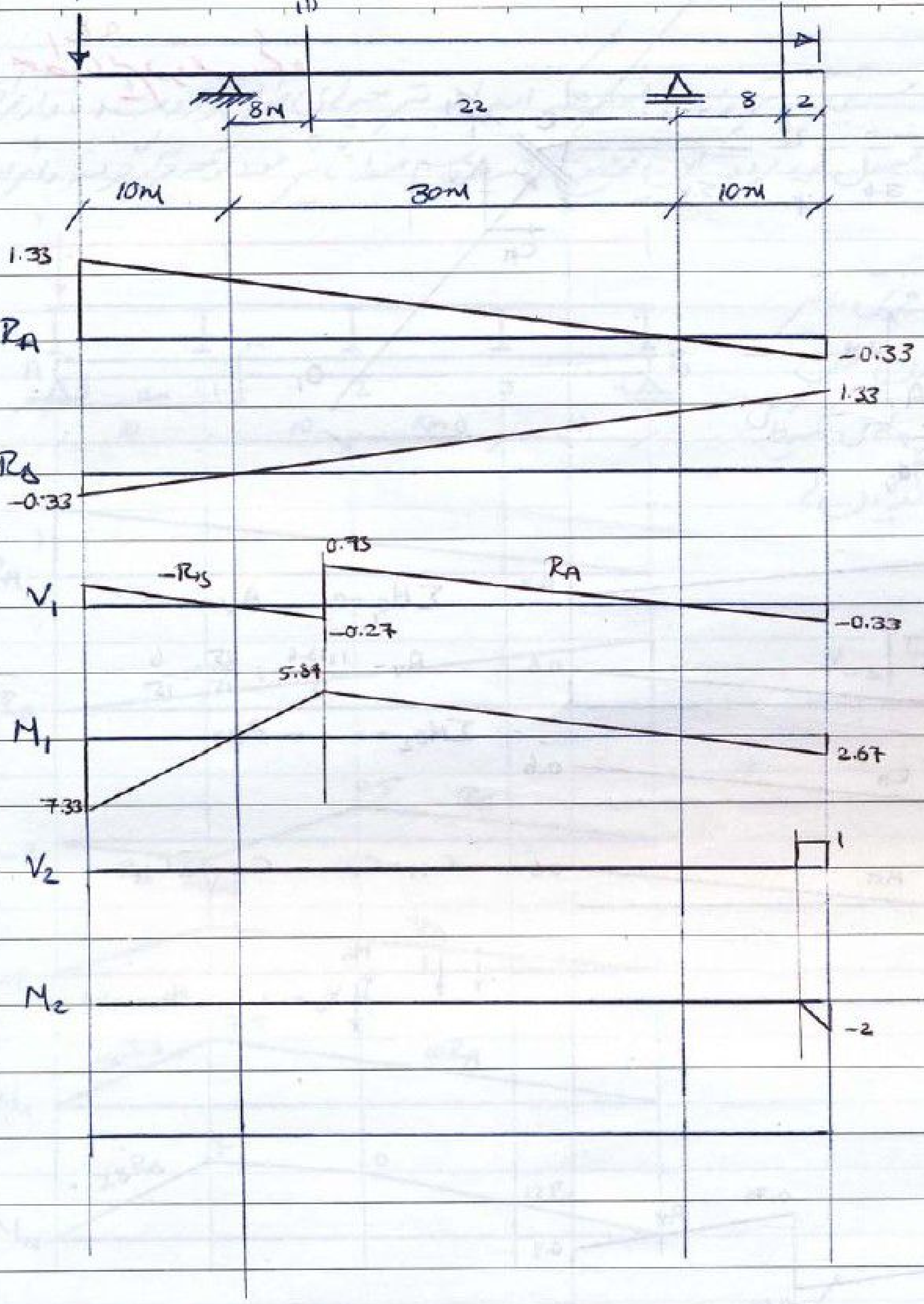


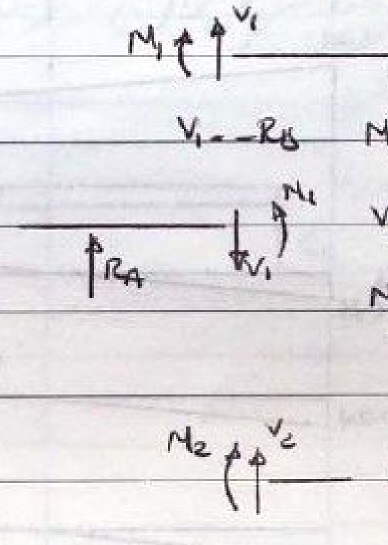
$V_E = -R_B$



$M_E = -5$

مثال ۲ :





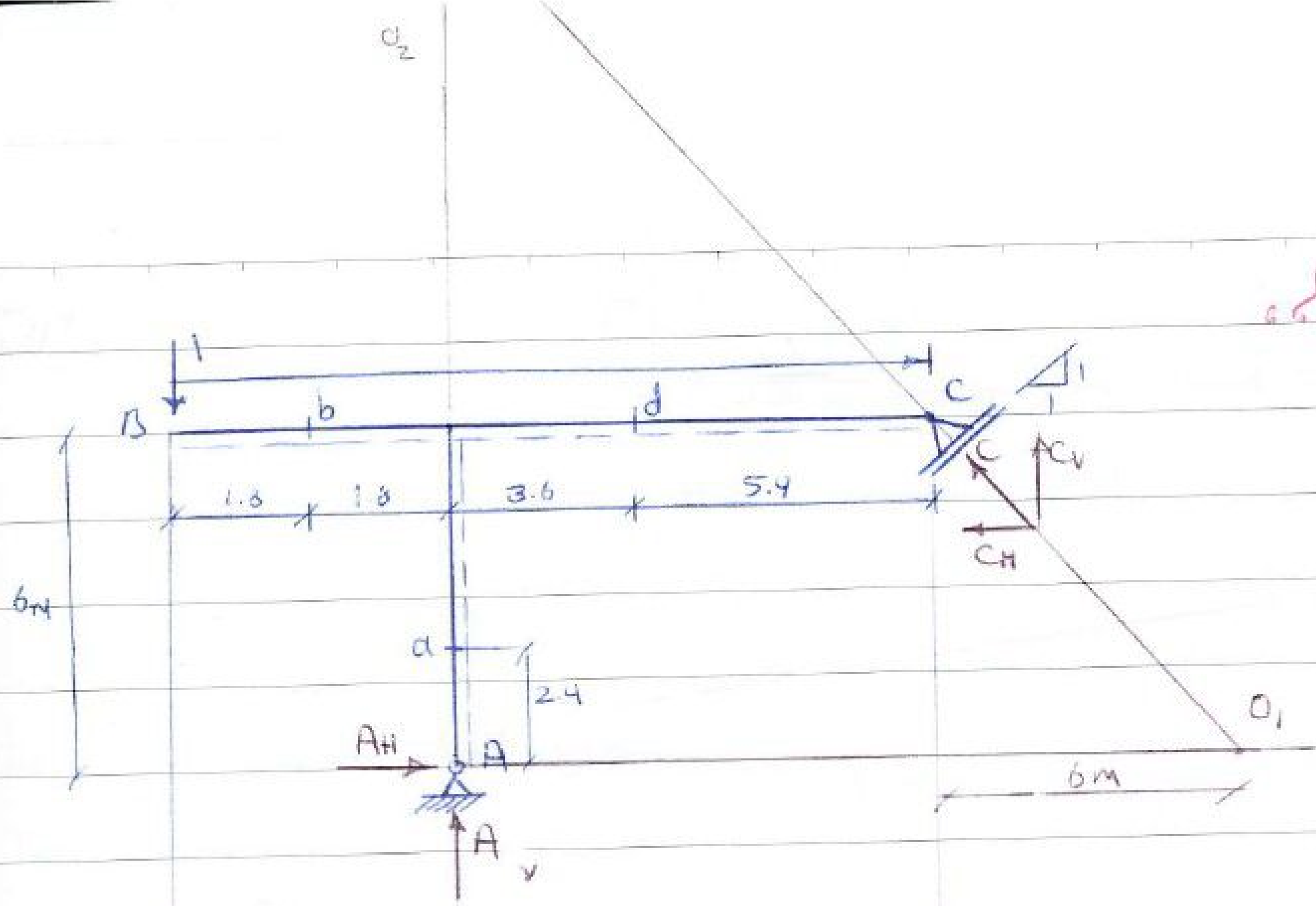
$V_1 = -R_B \quad M_1 = +22R_B$

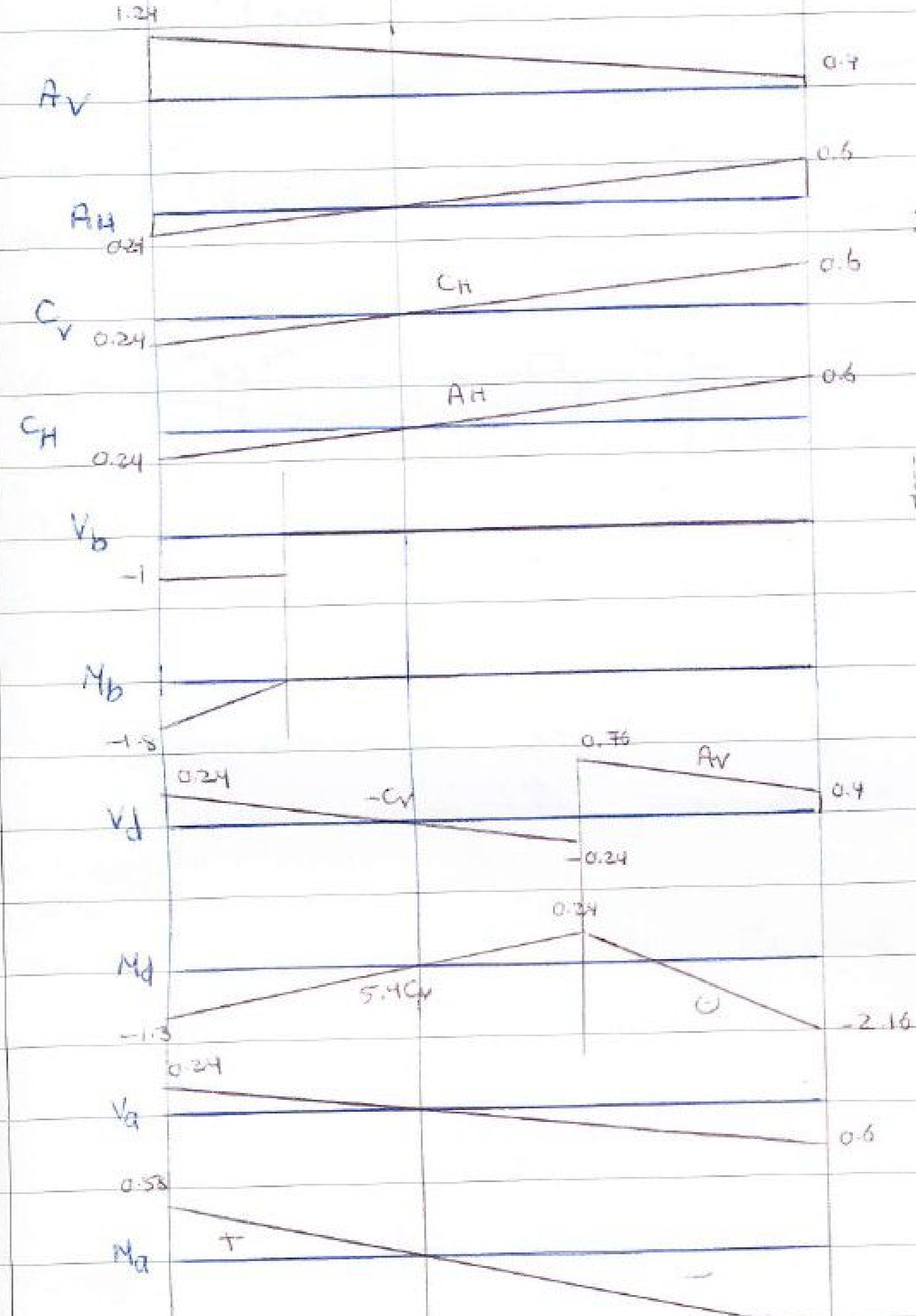
$V_1 = R_A$

$M_1 = 8R_A$

$M_2 = V_2 \times$

منحنی تاثیر در تکیه گاه ۹۲/۱



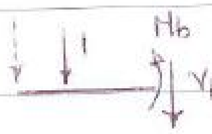


$\sum M_{O_1} = 0 \longrightarrow A_V =$

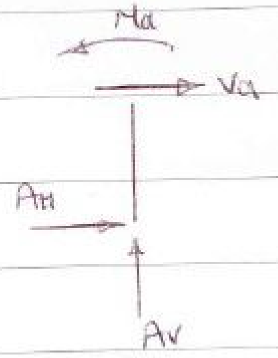
$A_V = \frac{1 \times 18.6}{15} , \frac{15}{15} , \frac{6}{15}$

$\sum M_{O_2} = 0 \longrightarrow A_H =$

$C_H = C_V \qquad C = \sqrt{2}\, C_H$



$V_b = -1 \qquad M_b = -1.8$

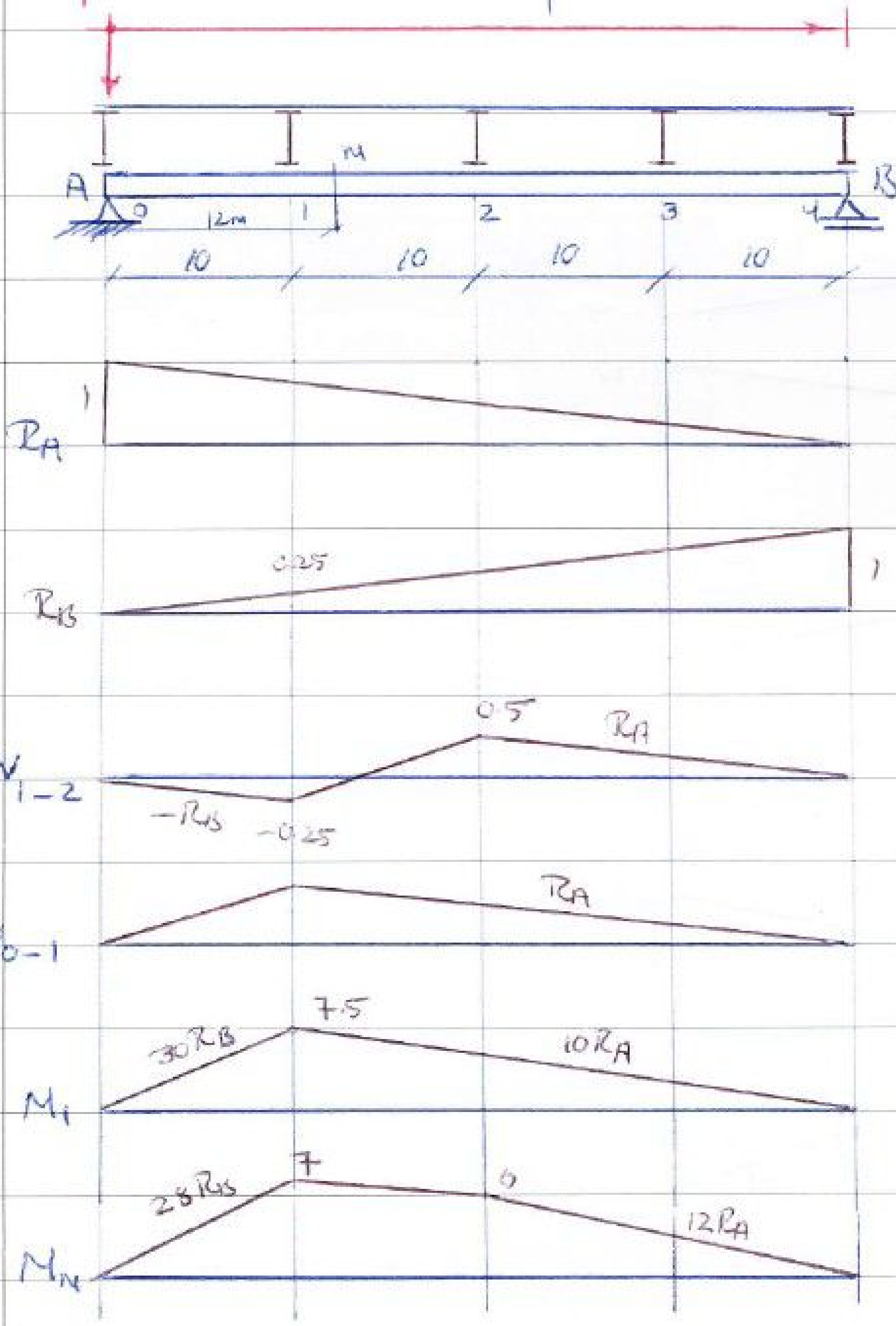


$V_a = -A_H$

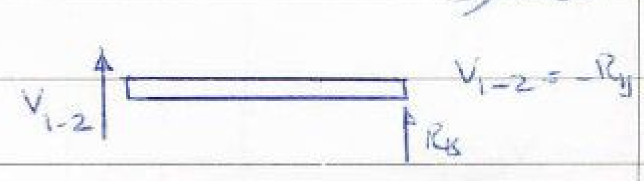
$M_a = -2.4 A_H$

خط تاثیر تیرهای اصلی :

در تیرهای اصلی بار واحد مستقیماً به تیر وارد نمی‌شود بلکه ابتدا به تیرچه‌های طولی وارد شده و از طریق تیرهای عرضی و گره‌ها به تیر اصلی منتقل می‌گردد. این موضوع باید در رسم خط تاثیر مورد توجه قرار گرفته و اثرات آن دیده شود.

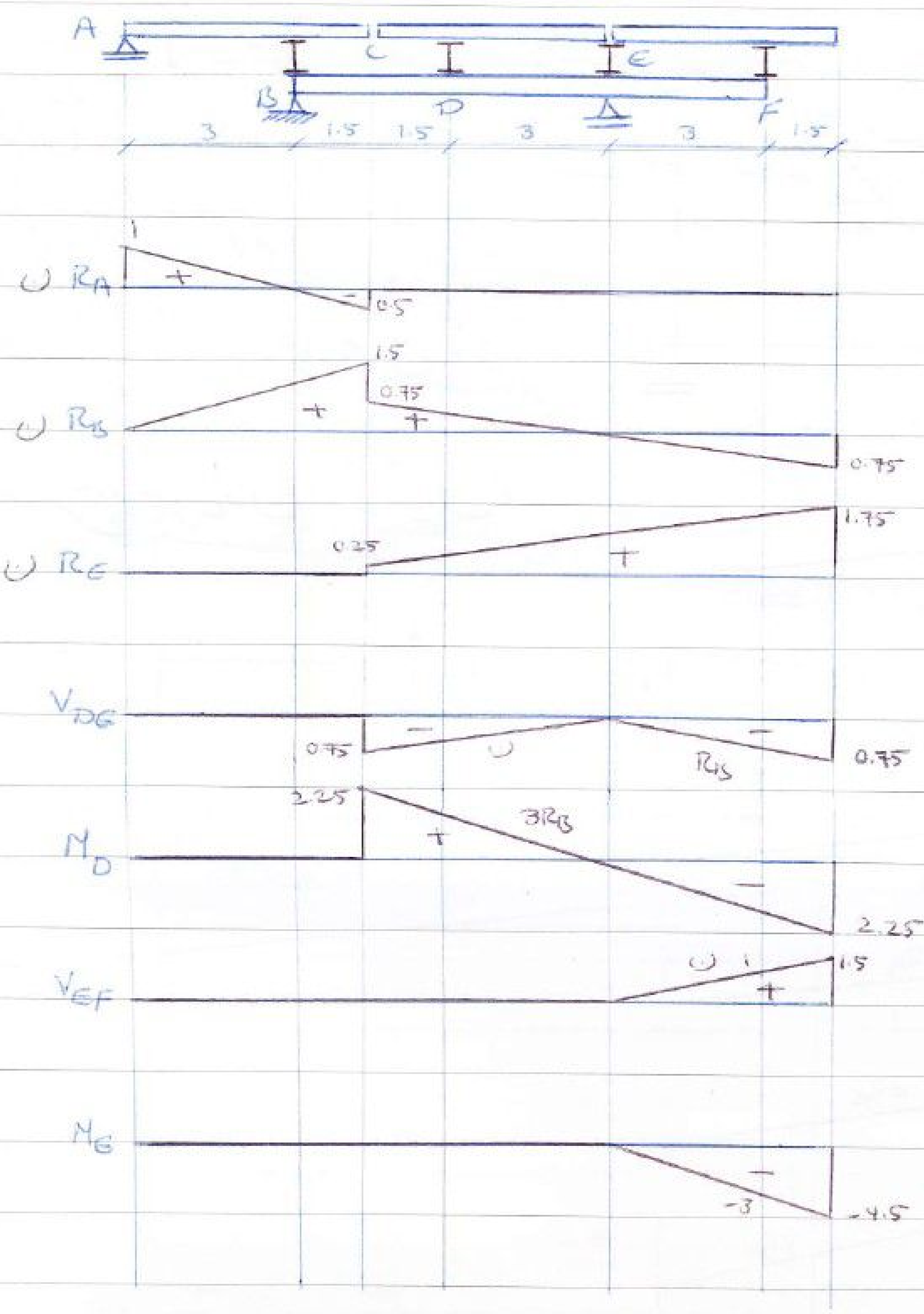


خط تاثیر واکنش‌های تکیه‌گاهی ، فرقی با تیر معمولی مشابه آن ندارد بدلیل طبق اصل استاتیک. در حقیقت واکنش‌های تکیه‌گاهی به جای چند نیروی تک از برآیند آن‌ها استفاده کرد.



* در تیرهای اصلی برش در هر چشمه یک عدد ثابت می‌باشد.

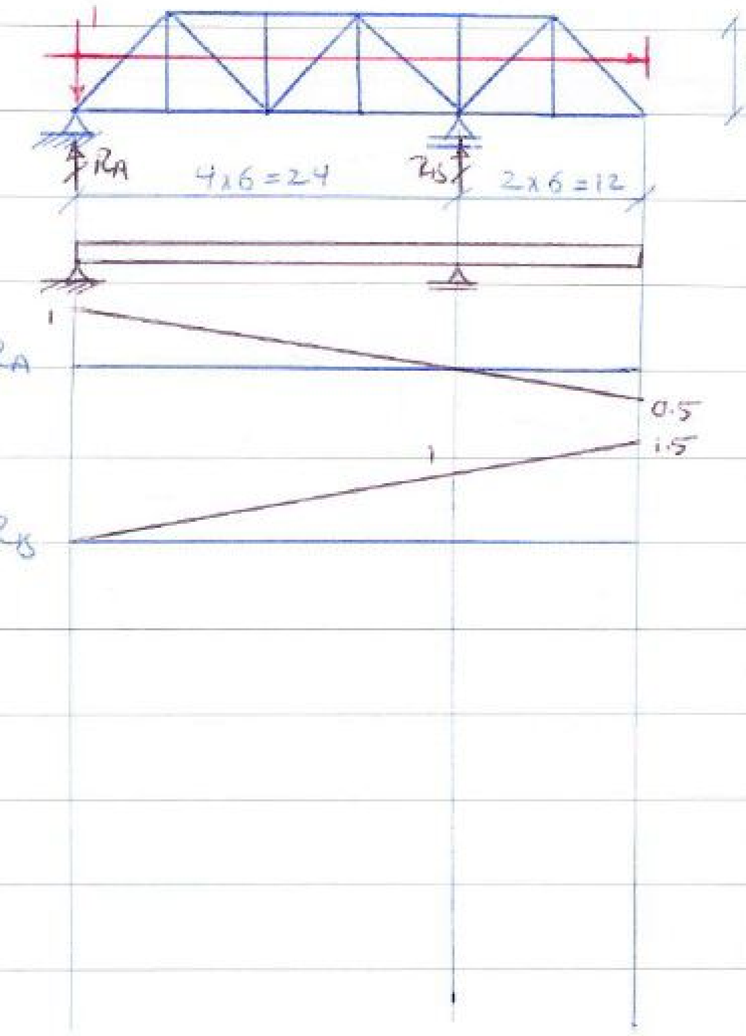
** از خط تاثیر یک نقطه‌ای درون چشمه را بخواهند هر طرف که بار واحد بود طرف دیگرش را در نظر گرفته و ΣM می‌نویسیم. سپس نمودار خط تاثیر را فقط برای سمت چپ از ابتدای سمت چپ تیر تا تیر عرضی سمت چپ رسم می‌کنیم و وارد چشمه نمی‌شویم. برای سمت راست هم چنین کاری را انجام می‌دهیم و سپس دو نقطه در تیر عرضی چپ و راست را به هم وصل می‌کنیم.


A
B
C
D
E
F
3
1.5
1.5
3
3
3
1.5
R_A
1
0.5
R_B
1.5
0.75
0.75
R_E
0.25
1.75
V_{DE}
0.75
R_B
0.75
M_D
2.25
$3R_B$
2.25
V_{EF}
1
1.5
M_E
-3
-4.5

خطوط تأثیر خرپاها :

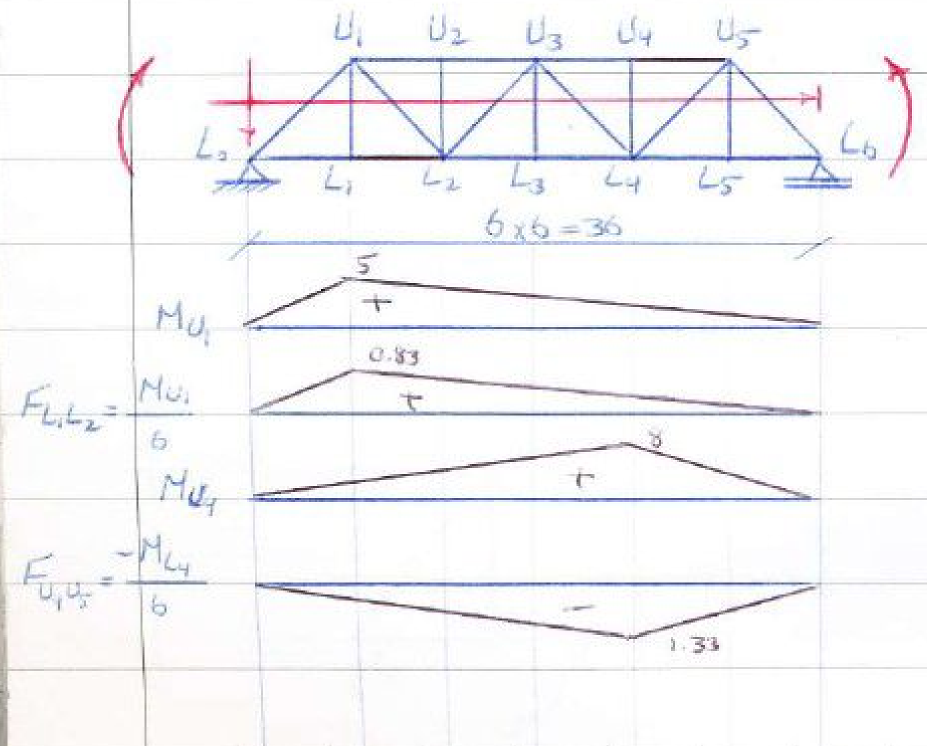
۱) واکنش های تکیه گاهی : خط تأثیر این واکنش ها همانند خط تأثیر واکنش های تکیه گاهی تیر معادل آن خرپا می باشد. زیرا ابعاد کلی به آن نیروهای خارجی نیرو مطرح است می توان به عنوان معادل های تیر را در اینجا استفاده نمود.

۲) خط تأثیر نیروهای داخلی در خرپاهای با بال های موازی :

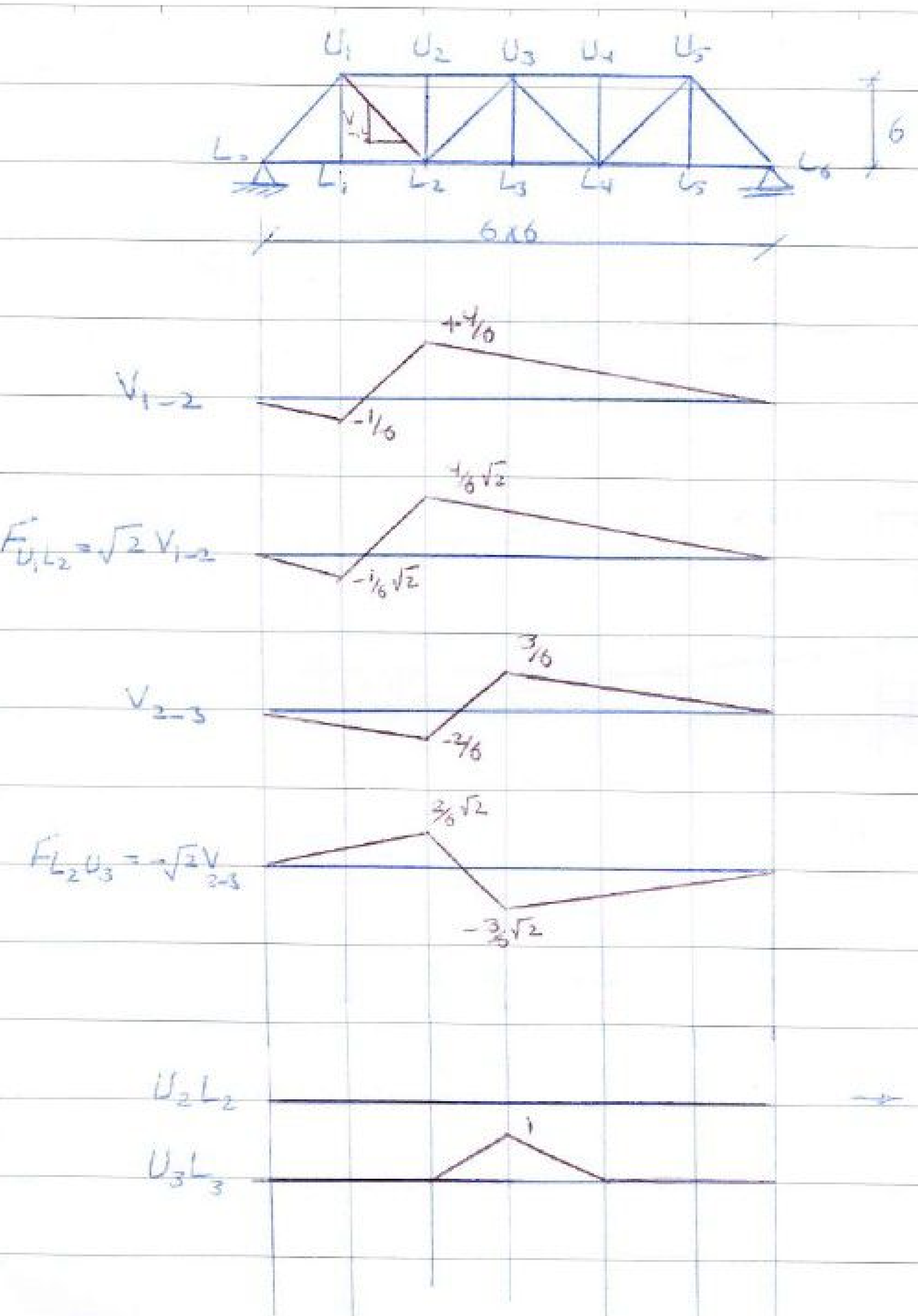


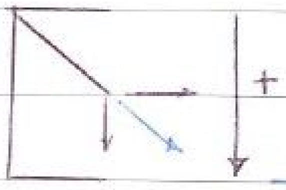
۲) خط تأثیر نیروهای داخلی در خرپاهای با بال های موازی :

تیر اصلی هم ارز خرپا در نظر می گیریم. با گرفتن گشتاور حول U_1 می توان نیروی L_1L_2 را یافت. برای رسم خط تأثیر L_1L_2 به این نکته توجه می کنیم که نیروی این عضو برابر است با گشتاور U_1 تقسیم بر 6 متر. حال اگر یک تیر اصلی معادل خرپا در نظر گرفته و برای آن M_{U_1} بدست می آوریم می توانیم خط تأثیر را بر اساس آن رسم کنیم.

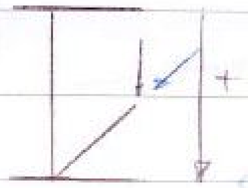


* چون تار بالا فشاری است پس $F_{U_4U_5}$ منفی می باشد.



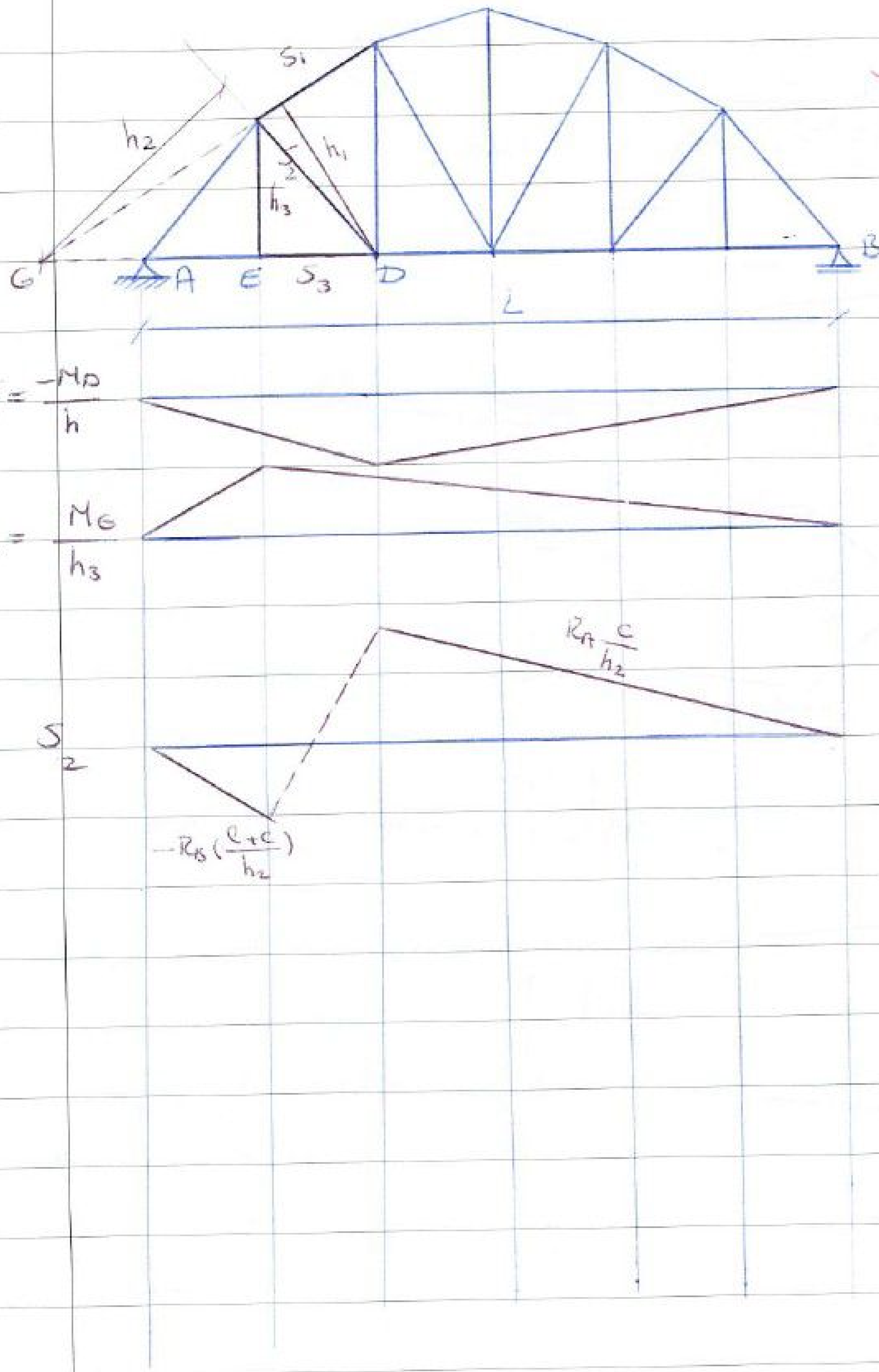


کشش مثبت



فشار منفی

خط تاثیر خرپاهای با یال های غیر موازی



مرکز گشتاور S_2 ؛ G است.

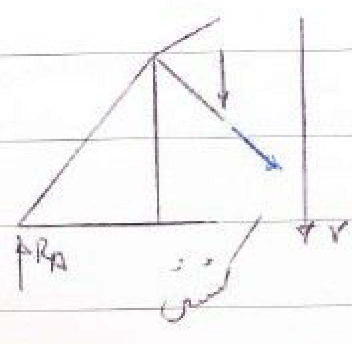
$$S_2 h_2 + R_B(l+C) = 0$$

$$S_2 = -R_B \frac{l+C}{h_2}$$

$$R_A C = h_2 S_2 \rightarrow S_2 = R_A C/h_2$$

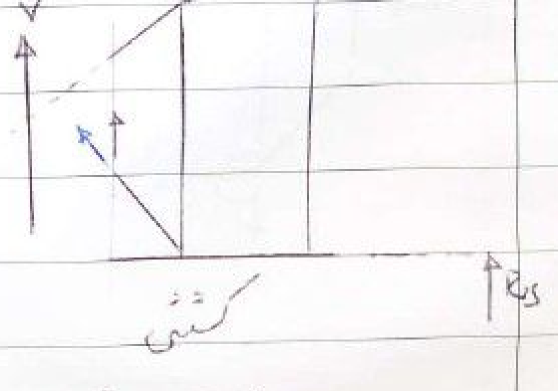
در محاسبه S_2 :

برای بار واحد بین D تا B داریم:



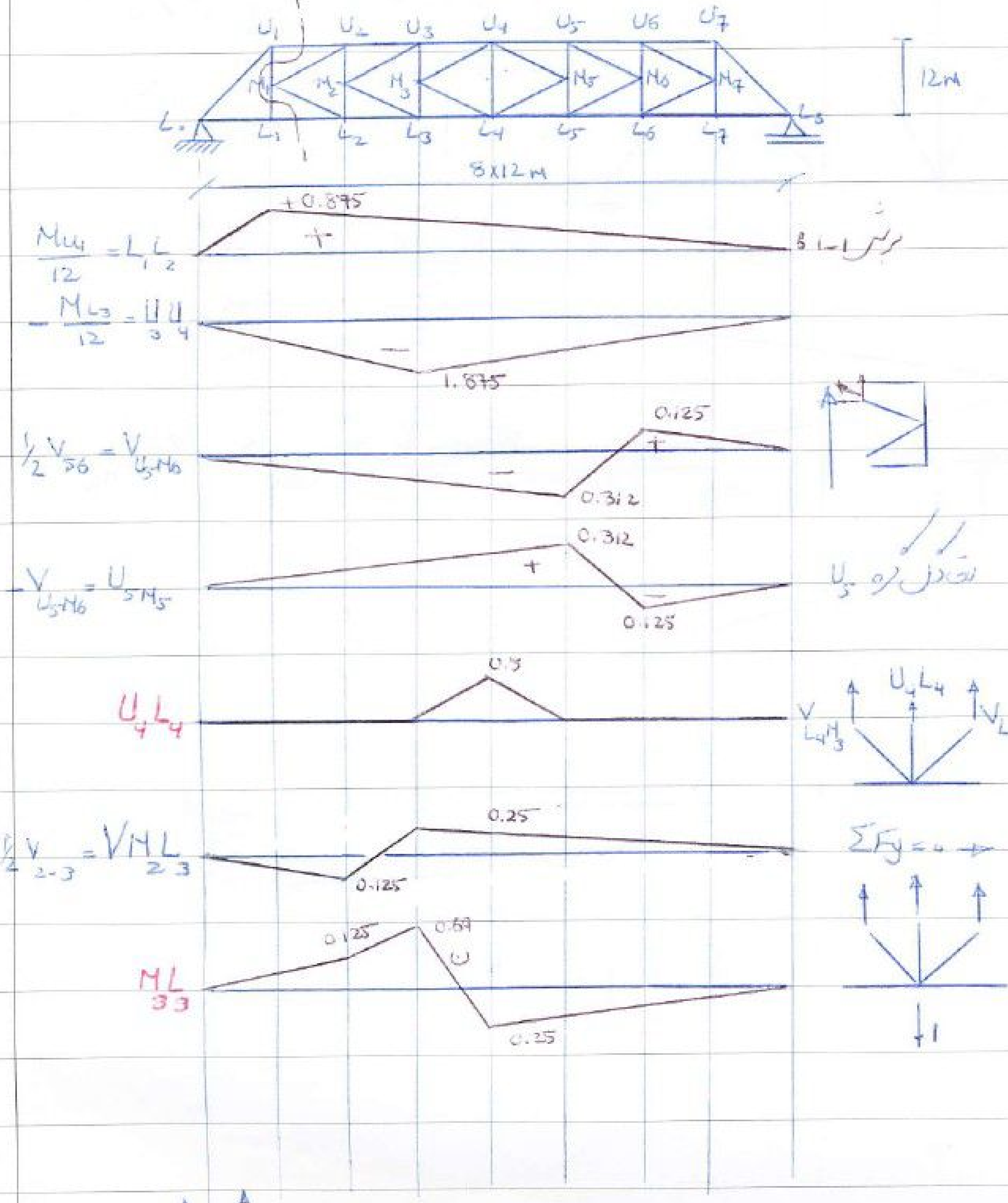
$$-S_2 h_2 + R_A C = 0$$

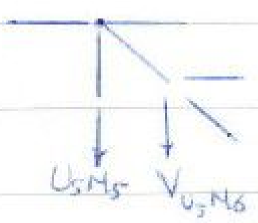
برای بار واحد بین A تا E داریم:



$$+S_2 h_2 + R_B(l+C) = 0$$

خطوط تاثیر خرپای K





$\Sigma F_y = 0 \rightarrow U_4L_4 = -(V_{L_4M_3} + V_{L_4M_5}) = 0$

که اگر بار واحد روی گره ... شود

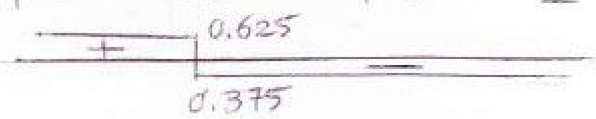
$U_4L_4 = -(V_{L_4M_3} + V_{L_4M_5}) + 1$

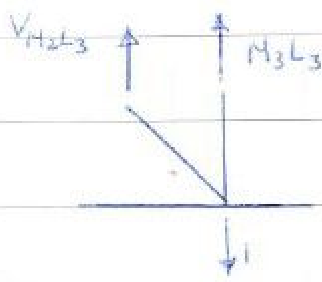
$= -(0.25 + 0.25) + 1 = 0.5$

$M_3L_3 = -V_{M_2L_3}$

برای L_3 با روابط بالا قرار می‌دهیم

$V_{L_4M_3} = -\frac{0.375}{2} \quad V_{L_4M_5} = +\frac{0.375}{2}$



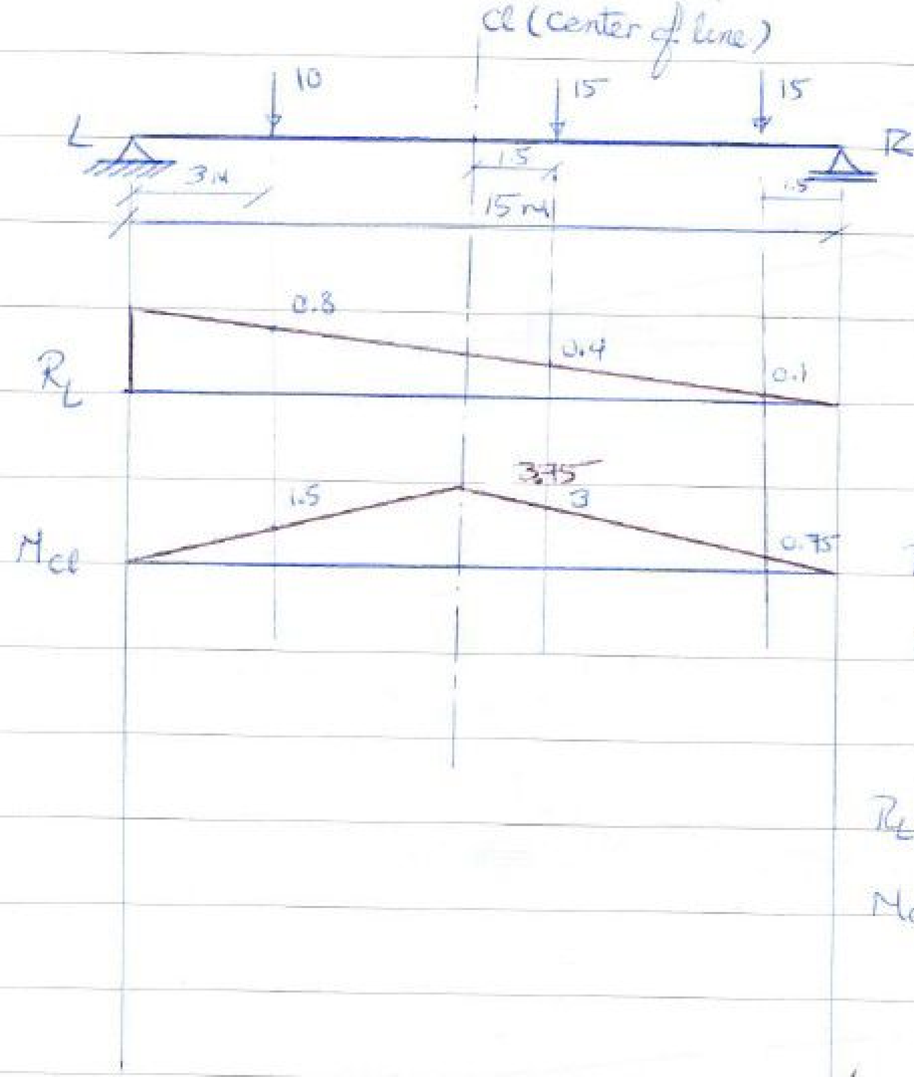


$M_3L_3 = 1 - V_{M_2L_3}$

$= 1 - 0.3125 = 0.67$

کاربرد خط تأثیر

۱) کاربرد خط تأثیر برای نیروهای با موقعیت ثابت :



اگر بار واحد در فاصله 3 متری از تکیه‌گاه باشد :

$R_L = 0.8 \qquad M_{cl} = 1.5$

اگر بار 10 باشد :

$R_L = 0.8 \times 10 \qquad M_{cl} = 1.5 \times 10$

اگر بار 15 را هم در سمت راست اضافه کنیم :

$R_L = 0.8 \times 10 + 0.1 \times 15$

$M_{cl} = 1.5 \times 10 + 0.75 \times 15$

اگر بار هم 15 را در 1.5 متری از cl وارد کنیم :

$R_L = 0.8 \times 10 + 0.1 \times 15 + 15 \times 0.4 = 15.5$ ton

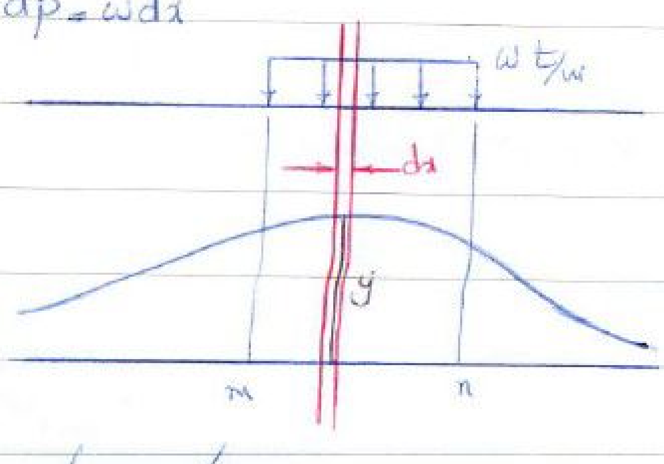
$M_{cl} = 1.5 \times 10 + 0.75 \times 15 + 15 \times 3 = 71.25$

مقدار تابع در حالت بار متمرکز $= \sum P_i \, y_i$

y_i : عرض خط تأثیر در زیر بار متمرکز

۲) کاربرد خط تأثیر برای بارهای گسترده یکنواخت :

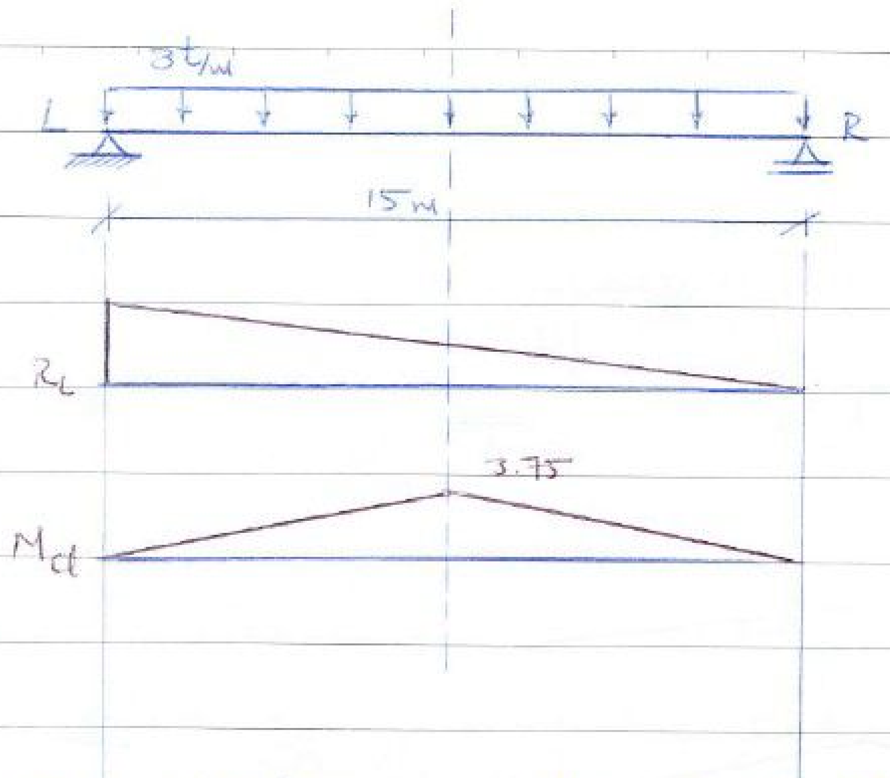
$dp = w\,dx$



$dF = (w\,dx)\,y$

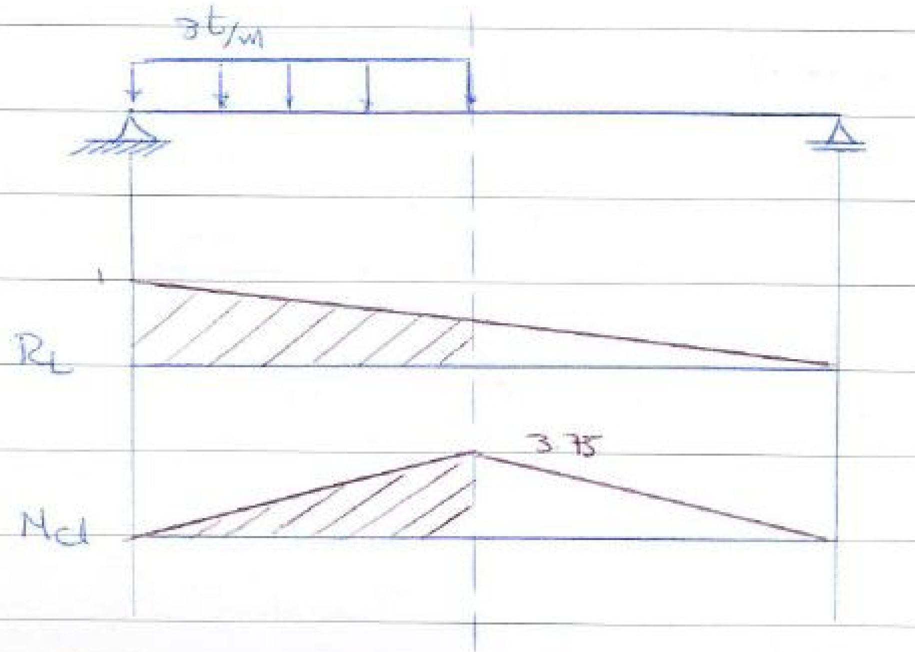
$F = \int_m^n w\,dx\,y = w\int_m^n y\,dx = w$ (سطح زیر خط تأثیر بین n, m)

مقدار تابع در حالت بار گسترده یکنواخت = شدت بار گسترده × سطح زیر نمودار خط تأثیر در محل بار گسترده



$R_L = 3\left(\frac{1}{2} \times 15 \times 1\right) = 22.5$ ton

$M_{cl} = 3 \times 15 \times \frac{3.75}{2} = 84.4$ ton.m



$R_L = 3 \times \frac{1}{2} \times 7.5\,(1 + 0.5) = 16.9$ ton

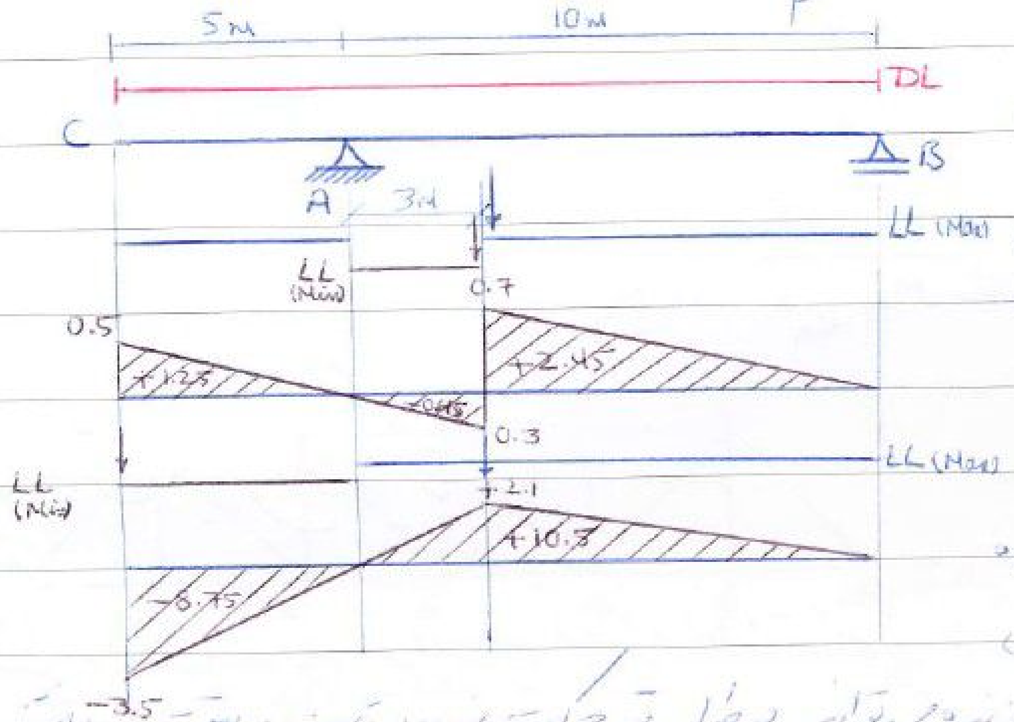
$M_{cl} = 3 \times 7.5 \times \frac{3.75}{2} = 42.2$

۳) کاربرد خطوط تأثیر برای بارها با موقعیت متغیر:

در هنگام استفاده از خط تأثیر برای بارها با موقعیت متغیر ابتدا باید موقعیت نامساعد بارها معلوم گردد و سپس بارها برای این موقعیت نامساعد مقدار تابع محاسبه شود.

موقعیت نامساعد موقعیتی است که باعث ایجاد حداکثر و حداقل تابع گردد. منظور از حداکثر، حداکثر مثبت و منظور از حداقل، حداکثر منفی است.

برای نشان دادن موضوع از مثالی استفاده می‌کنیم



۱) بار مرده گسترده یکنواخت $1\ t/m$

۲) بار زنده متمرکز به میزان 10 تن

۳) بار زنده گسترده به میزان $5\ ton/m$

توضیح: بار مرده همواره در تمام طول سازه قرار دارد. تغییر مکان یا حذف شدنی نیست. این بار انعطاف پذیر نیست. اما بار زنده می‌تواند در طول تیر حرکت نموده در بدترین موقعیت را داشته باشد و در مورد بار گسترده می‌توان در قسمت‌هایی آن را حذف نمود. با این حقیقت حالا بررسی می‌کنیم $V_{D\,Max}$.

$V_{D\,Max}$:

اثر بار مرده: $= 1(1.25 - 0.43 + 2.45) = 3.25\ t$

بار زنده گسترده $= 5(1.25 + 2.45) = 18.5$

بار زنده متمرکز $= 10 \times 0.7 =$

$\Longrightarrow V_{D\,Max} = 28.75\ t$

$V_{D\,Min}$:

اثر بار مرده $= 3.25$

بار زنده متمرکز $= 3(-0.45) = -2.25$

بار گسترده متمرکز $= -0.3 \times 10 = -3$

$\Longrightarrow V_{D\,Min} = -2\ ton$

بار زنده گسترده: Live Load (LL)

بار مرده گسترده: Dead Load (DL)

$M_{D_{Max}}$:

بار مرده $= 1(-8.75 + 10.5) = 1.75$

بار زنده گسترده $= 5 \times 10.5 = 52.5$

بار زنده متمرکز $= 10 \times 2.1 = 21$

$\Longrightarrow M_{D_{Max}} = 75.25\ t.m$

$M_{D_{Min}}$:

بار مرده $= 1.75$

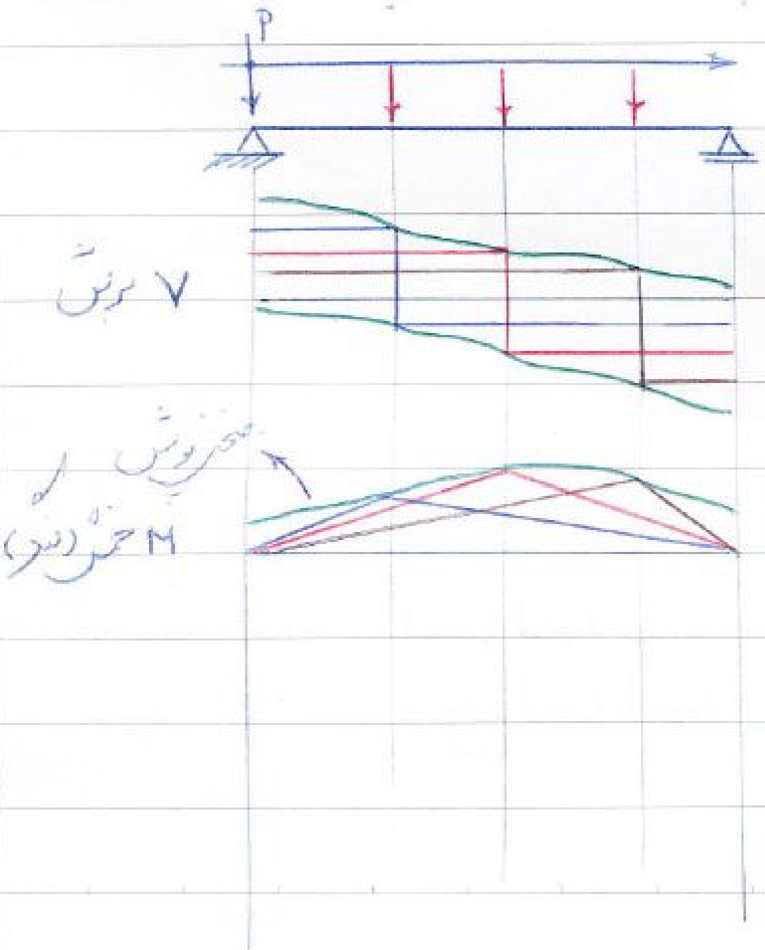
بار زنده گسترده $= -43.75$

بار زنده متمرکز $= -35$

$\Longrightarrow M_{D_{Min}} = -77\ ton.m$

منحنی پوش نیروی برشی و لنگر خمشی:

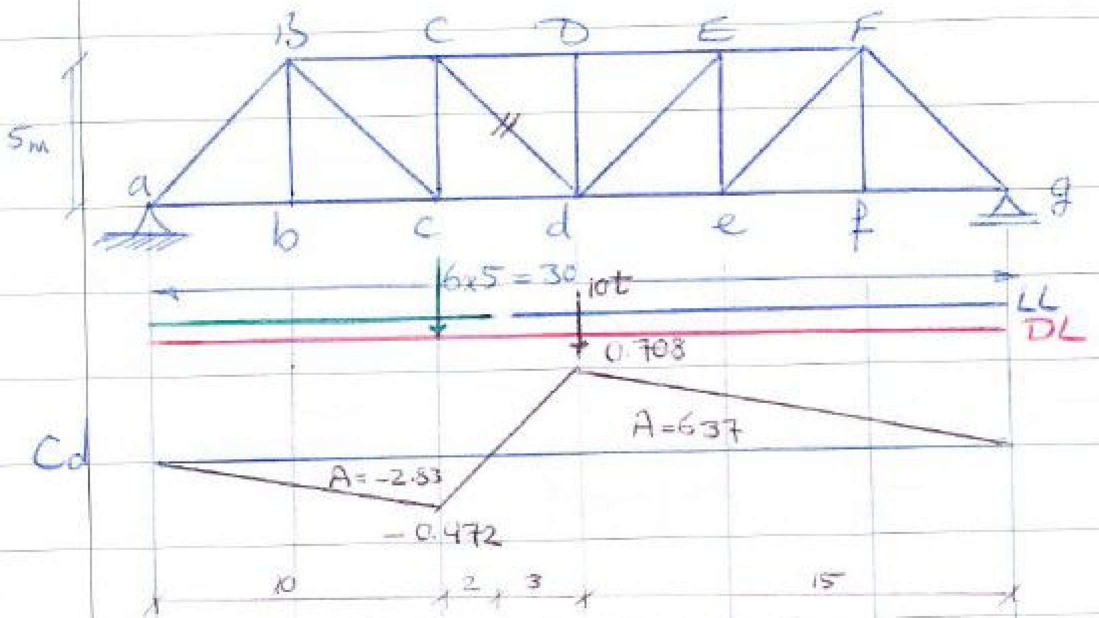
وقتی که بارهای وارد بر یک تیر یا قاب از نظر موقعیت ثابت باشند برای طراحی از نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی استفاده می‌شود که در فصول گذشته مورد تشریح قرار گرفتند. حال این سؤال پیش می‌آید که اگر بارهای وارد بر سازه متحرک باشند مبنای طراحی باید چه باشد؟ مثال کوچکی برای درک مطلب ارائه می‌گردد.



روش عملی برای رسم منحنی پوش این است که در دهانه چند نقطه مشخص در نظر بگیریم. تعداد این نقاط بین چهار نقطه تا هشت نقطه در هر دهانه کفایت می‌کند. برای این نقاط با رسم خط تأثیر نیروی برشی و لنگر خمشی رسم گردد. سپس بارهای مرده و زنده را بر این خطوط تأثیر اعمال شده و حداقل و حداکثر جواب‌ها در آن نقطه مشخص می‌گردد. با وصل کردن نقاط حداقل به یکدیگر منحنی پوش حداقل و با وصل کردن نقاط حداکثر منحنی پوش حداکثر بدست می‌آید.

مقادیر حداقل و حداکثر نیرو در خرپا به علت بار متحرک

در یک خرپا به علت حرکت بار، بعد نیروی داخلی اعضا عوض می‌شود. در موقعیت‌هایی از بار متحرک می‌تواند نیروی عضو حداقل و حداکثر گردد.



بار مرده گسترده یکنواخت	1.5 t/m
بار زنده گسترده یکنواخت	2 t/m
نیروی متمرکز زنده	10 t
اثر ضربه	22.4%

اثر ضربه: در نتیجه اعمال ناگهانی بار می‌باشد. در اثر اعمال ناگهانی بار، مقدار نیرو از حالت استاتیکی بزرگتر می‌شود. این ضریب اثر ضربه مربوط به هنگام اعمال بار است.
اثر ضربه فقط به بار زنده اعمال می‌گردد و برای بار مرده حکمی نخواهد داشت.

$D_L L = 1.5(6.37 - 2.83) = 5.31$

$LL = 2 \times 6.37 + 10 \times 0.708 = 19.82$

$I = 0.244 \times 19.82 = +4.84 \quad \Rightarrow \quad F_{Cd_{Max}} = 29.97\,t$

$+29.97\,t$ کشش

F

$DL = 5.31$

$LL = 2 \times (-2.83) = -5.65$

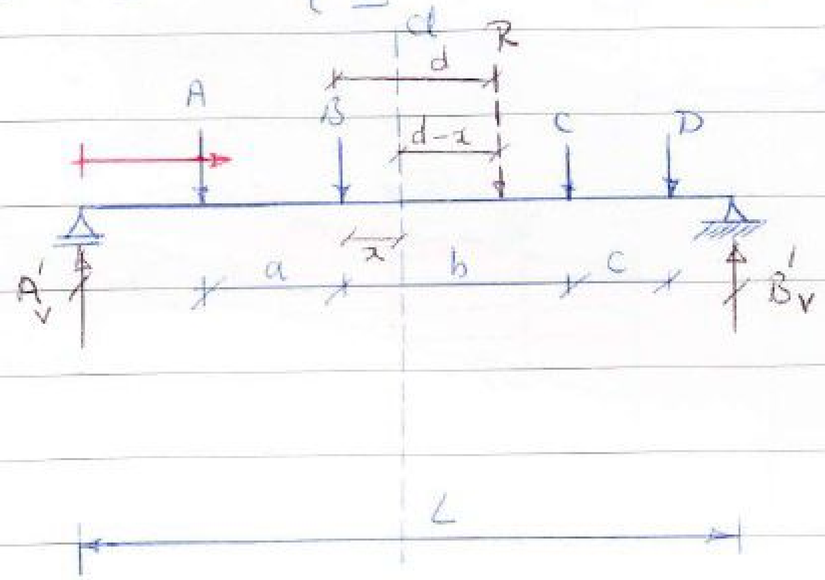
$\quad +10(-0.472) = -4.72 \quad \Rightarrow \quad F_{Cd_{Min}} = -7.6\,t$

$I = 0.244 \times (-5.66 - 4.72) = -2.53$

$-7.6\,t$

لنگر خمشی حداکثر مطلق در یک تیر ساده تحت سیستمی از بارهای متمرکز متحرک (مسئله با یک از نظر تجربیات است).

این موضوع ارتباطی با خط تأثیر ندارد و موضوعی مستقل است ولی لنگر خمشی زمینه مقادیر حداکثر ناحیه می‌باشد



چون مجموعه بار متمرکز داریم لنگر خمشی حداکثر
بدون شک زیر یکی از بارها رخ می‌دهد
فرض می‌کنیم این حداکثر زیر B باشد
برآیند بارها را R در نظر می‌گیریم
x را طوری تعیین می‌کنیم تا لنگر زیر بار B
حداکثر گردد

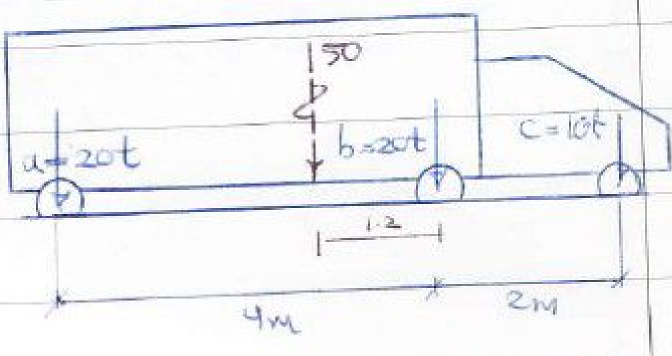
$$A'_v = \frac{1}{L}(R)\left(\frac{l}{2} - (d - x)\right) = \frac{R}{2} + \frac{Rx}{L} - \frac{Rd}{L}$$

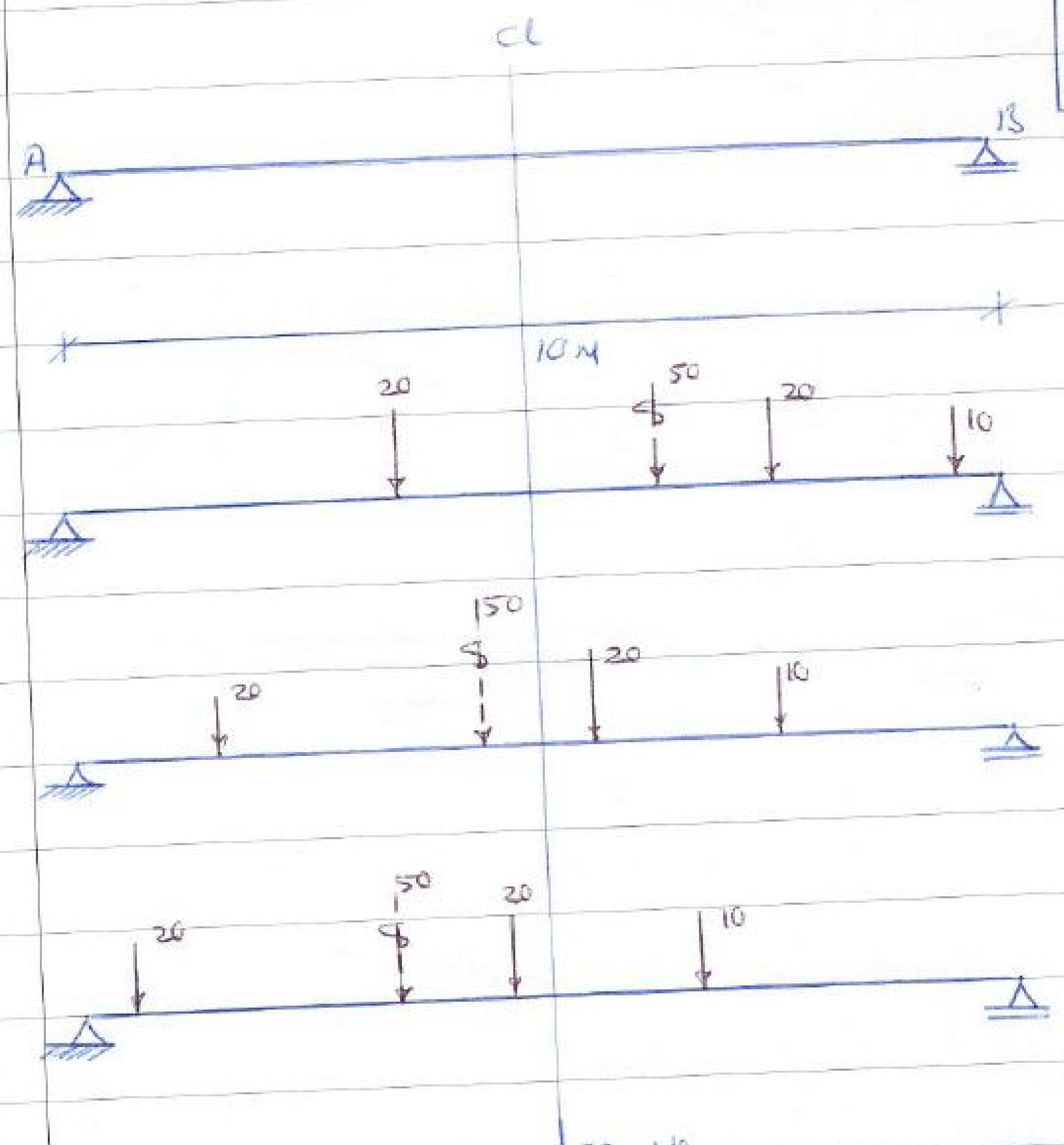
$$M_B = A_v\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa = \left(\frac{R}{2} + \frac{Rx}{l} - \frac{Rd}{L}\right)\left(\frac{L}{2} - x\right) - Aa$$

$$M_{15} = \frac{RL}{4} - \frac{Rd}{2} - \frac{Rx^2}{L} + \frac{Rxd}{L} - Aa \rightarrow \frac{dM_{15}}{dx} = 0 \rightarrow -\frac{2Rx}{L} + \frac{Rd}{L} = 0$$

$$\rightarrow x = d/2$$

لنگر زیر یک بار متمرکز وقتی حداکثر است که وسط دهانه زیر وسط فاصله بین آن بار متمرکز و برآیند قرار گیرد. این لنگر حداکثر مطلق است اگر بزرگترین لنگر باشد. در صورتی که تعداد زیادی بار متمرکز داشته باشیم، معمولاً لنگر حداکثر مطلق در زیر بزرگترین و نزدیکترین بار به برآیند رخ می دهد



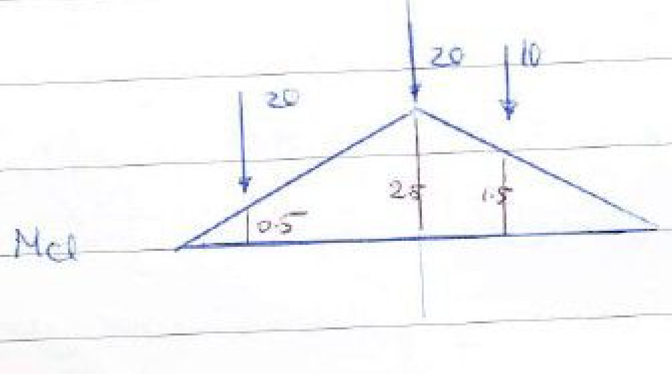


$M_a = 64.8$ ton.m

$M_b = 76.8$ حداکثر مطلق

$M_c = 57.8$

حل از روش خط تأثیر ۱-۹۶



$M_{cl} = 20 \times 0.5 + 20 \times 2.5 + 10 \times 1.5$

$= 10 + 50 + 15 = 75$

حمید کاظم

فصل پنجم

تغییر شکل سازه‌ها

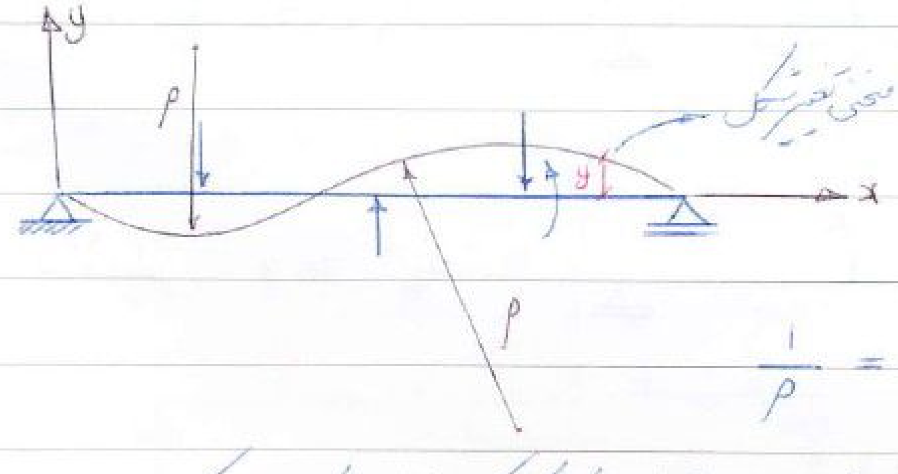
در این فصل تغییر شکل سازه‌های معین مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای محاسبهٔ تغییر شکل سازه‌ها دو روش مورد توجه قرار خواهد گرفت:

۱) روش هندسی: در این روش معادلهٔ دیفرانسیل تغییر شکل اعضای خمشی مورد توجه قرار گرفته و از روش‌های ترسیمی برای حل آن استفاده می‌شود.

۲) روش انرژی: ملاحظه می‌گردد روش‌های انرژی در یک روش وسیعی برای محاسبهٔ تغییر شکل سازه‌ها بدست می‌دهند. دیگر روش‌های انرژی می‌توان تغییر شکل سازه‌های معین را در اثر نیروی محوری، لنگر خمشی، لنگر پیچشی و نیروهای برشی محاسبه نمود و هیچ محدودیتی برای آن وجود ندارد.

محاسبه تغییر شکل‌های ناشی از خمش در تیرها به کمک رابطه دیفرانسیل خمش الاستیک:

از درس مقاومت مصالح می‌دانیم که بین شعاع ρ انحنای یک تیر و لنگر خمشی آن رابطهٔ زیر برقرار است:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

از هندسه تحلیلی:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

در کلیهٔ سازه‌ها با تغییر شکل‌های کوچک سروکار داریم. تغییر شکل کوچک تغییر شکلی است که در مقایسه با ابعاد تغییر محسوسی ایجاد نمی‌کند. به عنوان مثال تغییر شکل حداکثر یک تیر محدود به $\frac{L}{300}$ است یعنی اگر دهانهٔ تیری 6m باشد تغییر شکل حداکثر آن محدود به 2cm خواهد بود. این عدد را می‌توان در مقایسه با طول تیر ناچیز دانست. در تغییر شکل‌های کوچک با تقریب خوبی می‌توان مخرج کسر را برابر واحد گرفت چون y' بسیار کوچک است و وقتی به توان دو برسد مخرج کسر تقریباً واحد خواهد شد. بنابراین رابطهٔ دیفرانسیل بصورت زیر در می‌آید:

$$y'' = \frac{1}{\rho} \quad (2)$$

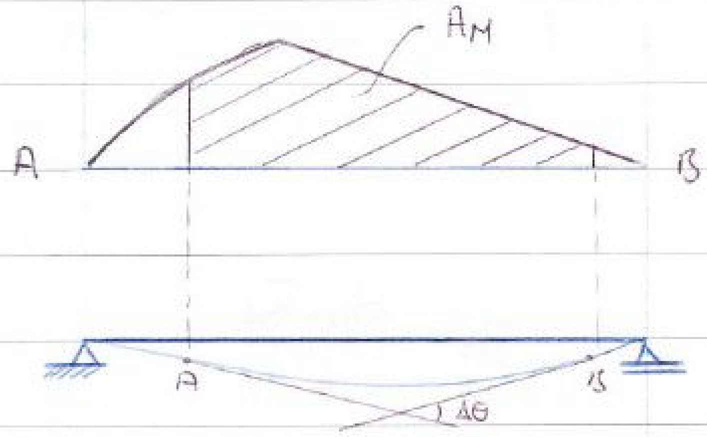
از تلفیق روابط ۱ و ۲ می‌توان نوشت:

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

معادله فوق به معادله دیفرانسیل تغییر شکل اعضای خمشی معروف است.

اگر معادله M به صورت تابعی از x باشد با دو بار انتگرال‌گیری از آن می‌توان معادله y را به دست آورد. در همه موارد این انتگرال‌گیری به این سادگی نخواهد بود. در بسیاری موارد نیازی به داشتن معادله هم نیست. از طرفی گاه تنها اندازه تغییر شکل تیر در یک یا چند نقطه خاص مهم تر می‌باشد. به همین علت روش‌های عددی برای حل این معادله دیفرانسیل ابداع شده است.

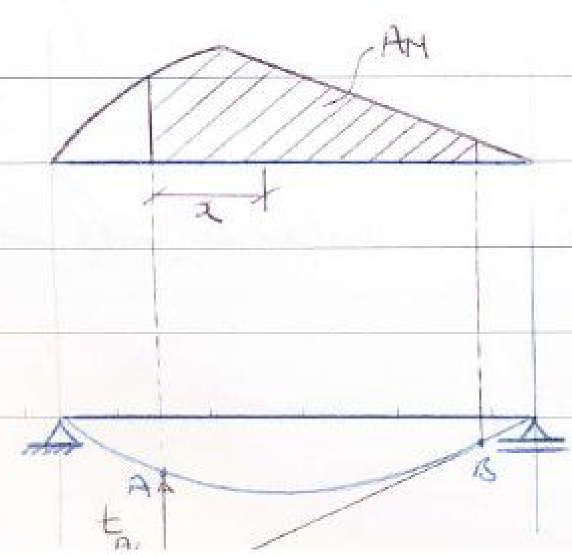
قضیه اول لنگر سطح: زاویه بین مماس‌های مرسوم بر دو نقطه منحنی تغییر شکل برابر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ می‌باشد.



نمودار $\frac{M}{EI}$

$$\Delta\Theta = \Theta_A - \Theta_B = A_M$$

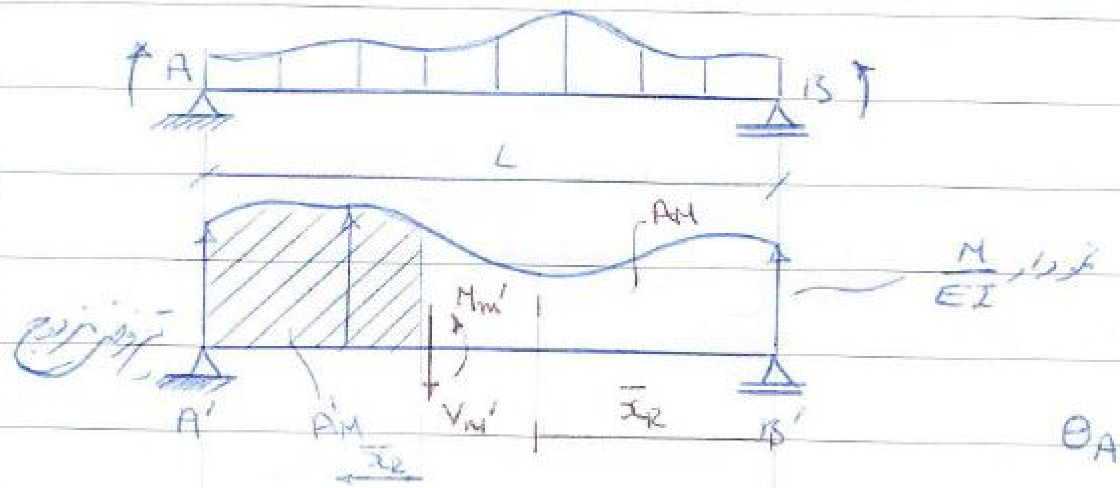
قضیه دوم لنگر سطح: انحراف نقطه A واقع در روی منحنی الاستیک از مماس مرسوم بر نقطه B واقع بر روی منحنی الاستیک مساوی با لنگر سطح زیر نمودار $\frac{M}{EI}$ بین آن دو نقطه نسبت به نقطه A.



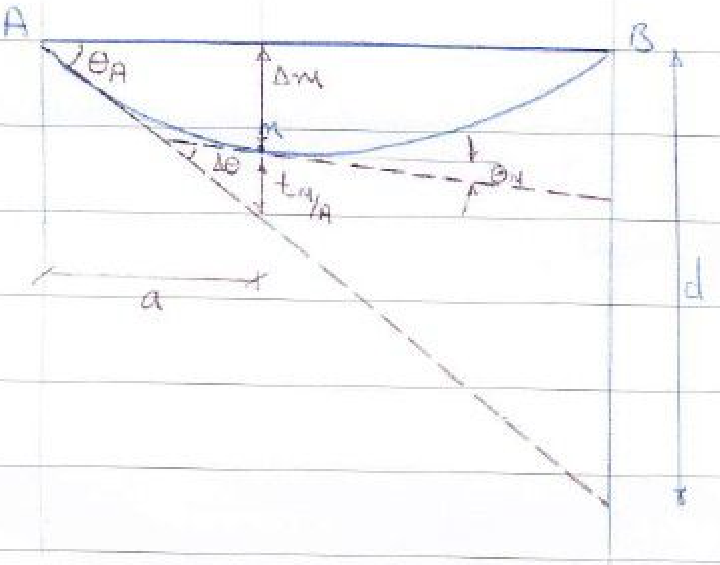
$$t_{A/M} = A_M \cdot x$$

روش بار الاستیک:

روشی تشابهی است. بدین معنی که تیری با بارگذاری الاستیک ساخته می‌شود. بار الاستیک این تیر نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی است. ثابت می‌شود که شیب θ و Δ در تیر اصلی مثل هم به نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر الاستیک یا تیر فرضی است.



$$\theta_A = \frac{d}{l}$$



$d =$ انحراف نقطه B از مماس رسم شده بر A

$$d = A_M \cdot \bar{x}_R$$

$$\Rightarrow \theta_A = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L}$$

در تیر مزدوج:

$$\Sigma M_{B'} = 0 \Rightarrow R'_{A'} = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L}$$

مشاهده می‌شود که شیب θ_A در تیر اصلی با برش R_{A}' در تیر مزدوج برابر است. تیر مزدوج تیری است هم طول با تیر اصلی که بار وارد بر آن نمودار $\frac{M}{EI}$ تیر اصلی است. به آن بار الاستیک گویند. در صورتیکه نمودار M مثبت باشد بار الاستیک مثبت بوده و رو به بالا است.

محاسبه θ یک نقطه دلخواه:

$$\Delta\theta = \theta_A - \theta_M \Rightarrow \theta_M = \theta_A - \Delta\theta \qquad \Delta\theta = A'_M$$

$$\Rightarrow \theta_M = \theta_A - A'_M$$

$$\Rightarrow \theta_M = \frac{A_M \cdot \bar{x}_R}{L} - A'_M$$

نیروی برشی در تیر مزدوج :

$$V_{M'} = R_{A'} - A'_{M}$$

مشاهده می‌شود که نیروی برشی در تیر مزدوج معادل شیب منحنی تغییرشکل در تیر اصلی است. به این نیروی برشی، نیروی برشی الاستیک گویند. از همان قرارداد نیروی برشی برای آن استفاده می‌گردد. اگر نیروی برشی الاستیک مثبت باشد، شیب مثبت است (شیب رو به بالا). اگر نیروی برشی الاستیک منفی باشد، شیب منفی است (رو به پایین).

محاسبه Δ نقطه M :

$$\Delta_M = a\theta_A - t_{M/A}$$

$$\Delta_M = a R_{A'} - A'_{M} \cdot \bar{x}_R$$

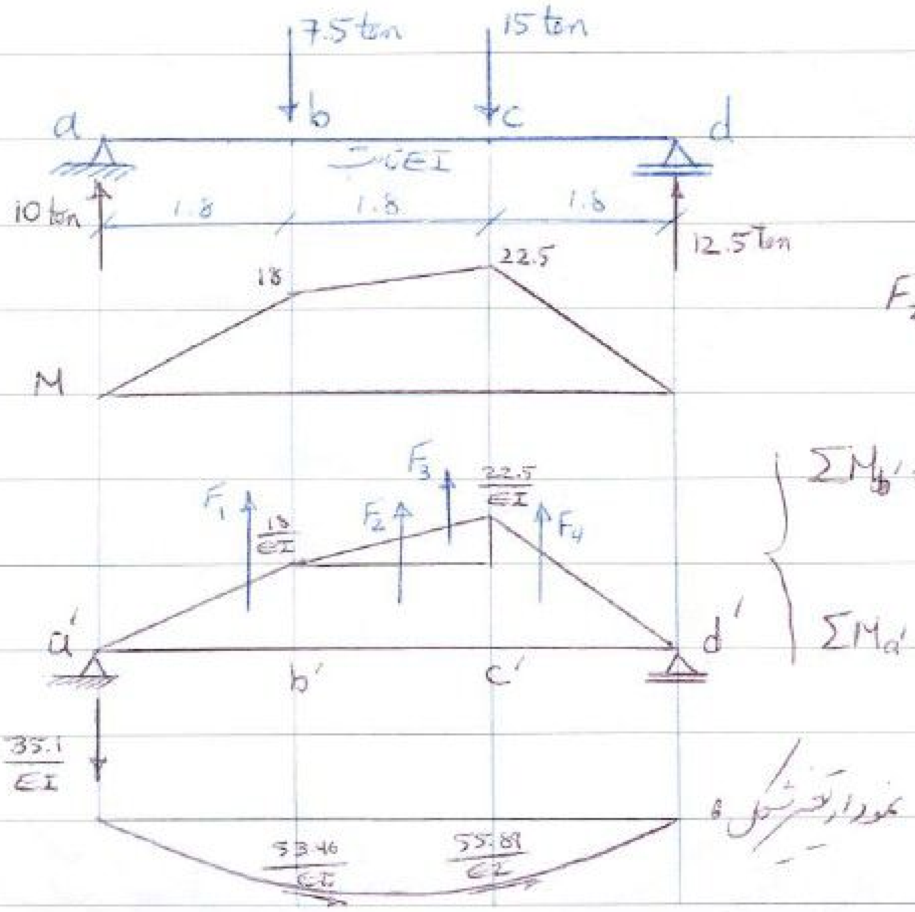
محاسبه لنگر M' در تیر مزدوج :

$$\Sigma M_{M'} = 0 \Rightarrow M_{M'} = R_{A'} \cdot a - A'_{M} \cdot \bar{x}_R$$

مشاهده می‌شود که میزان تغییر مکان نقطه در تیر اصلی مساوی لنگر خمشی در تیر مزدوج است. به این لنگر، لنگر خمشی الاستیک گویند. لنگر خمشی الاستیک وقتی مثبت است که در تار پایین آن ایجاد کشش نماید (همان قرارداد علامت سابق). اگر لنگر خمشی الاستیک مثبت باشد تغییر مکان رو به بالا است. اگر لنگر خمشی الاستیک منفی باشد تغییر مکان منفی بوده رو به پایین است.

$$\frac{dV}{dx} = q \qquad \frac{dM}{dx} = V \longrightarrow y'' = \frac{M}{EI}$$

مثال: در تیر شکل داده شده تغییر مکان قائم و دوران نقاط A , B , C , D را محاسبه و مقدار تغییر مکان حداکثر را بدست آورید.



$$F_1 = \frac{1.8}{2} \times \frac{18}{EI} = \frac{16.2}{EI}$$

$$F_2 = \frac{32.4}{EI} \qquad F_3 = \frac{4.05}{EI} \qquad F_4 = \frac{20.25}{EI}$$

$$\Sigma M_{d'} = 0 \Rightarrow R_{a'} = \frac{35.1}{EI}$$

$$\Sigma M_{a'} = 0 \Rightarrow R_{d'} = \frac{37.8}{EI}$$

$$\theta_a = V_{a'} = -\frac{35.1}{EI} \qquad V_{a'} = \frac{-35.1}{EI}$$

$$\theta_b = V_{b'} = F_1 - R_{a'} = -\frac{18.9}{EI}$$

$$\delta_b = M_{b'} = -1.8\left(\frac{35.1}{EI}\right) + \left(\frac{16.2}{EI}\right)(0.6) = -\frac{53.46}{EI} \downarrow$$

$$\theta_c = V_{c'} = R_{d'} - F_4 = +\frac{17.55}{EI}$$

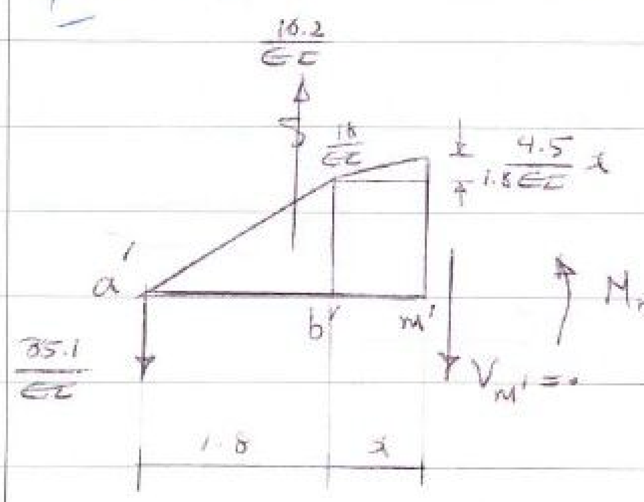
$$\delta_c = M_{c'} = -\frac{55.89}{EI} \downarrow$$

$$\theta_d = V_{d'} = +\frac{37.8}{EI}$$

$$\delta_d = M_{d'} = 0$$

محاسبه مقدار و محل تغییرمکان Max :

با توجه به نتایج بدست آمده و تغییر علامت شیب بین نقاط B و C می‌توان نتیجه گرفت که تغییرمکان حداکثر بین نقاط B و C خواهد بود که در آن $\theta = 0$ است. نتیجه می‌گیریم جایی قرار دارد که حتماً برش الاستیک برابر صفر است.



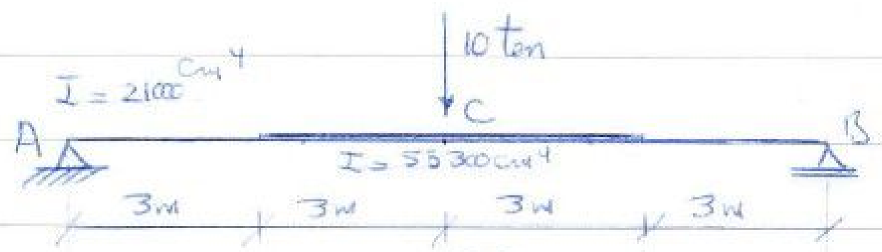
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow -\frac{35.1}{EI} + \frac{16.2}{EI} + \frac{18x}{EI} + \frac{4.5}{1.8EI}\,x\,\frac{x}{2} = 0$$

$$\longrightarrow x = 0.984\,m$$

$$\sum M_{m'} = 0 \Rightarrow EI\,M_{m'} + 35.1(1.8 + 0.984) - 16.2(0.6 + 0.984) - 18 \times 0.98 \times \frac{0.984}{2}$$

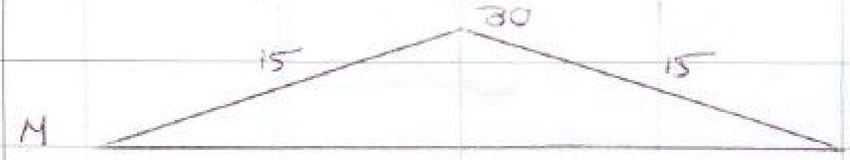
$$-\frac{4.5}{1.8} \times 0.984 \times \frac{0.984^2}{2 \times 3} = 0 \longrightarrow \delta_{Max} = M_{m'} = \frac{-62.76}{EI} \downarrow$$

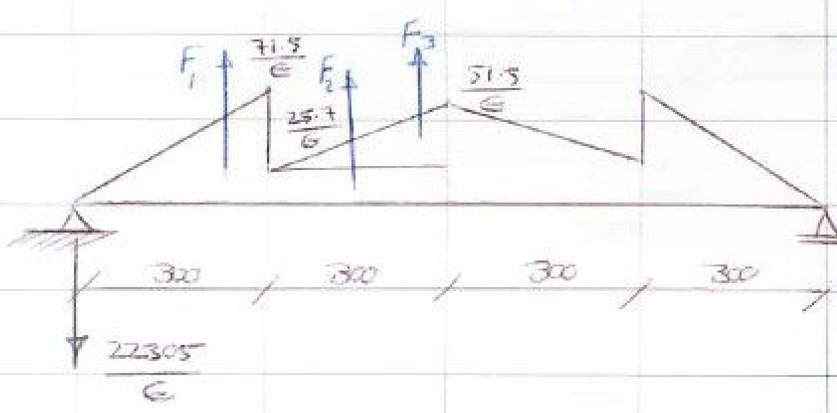
مثال : در شکل نشان داده شده تغییرمکان قائم نقطه C را بدست آورید.



$E = 2.1 \times 10^6\ kg/cm^2$

واحد طول = cm نیرو = kg





$$F_1 = \frac{71.5 \times 300}{2E} = \frac{10725}{E}$$

$$F_2 = \frac{7710}{E} \qquad F_3 = \frac{3870}{E}$$

$$R_A' = \frac{22305}{E}$$

$$\delta_C = M_C' = -R_A'(600) + 400F_1 + 150F_2 + 100F_3 = -\frac{7549500}{E} = -3.78\,cm \downarrow$$

تعمیم روش بار الاستیک برای تیرها با شرایط تکیه‌گاهی مختلف (روش تیر مزدوج):

تاکنون روش بار الاستیک فقط برای تیرهای دهانه‌ای ساده مورد توجه قرار گرفت. می‌توان ثابت نمود که اساس روش برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف قابل تعمیم است، مشروط بر اینکه در تیر مزدوج تغییراتی در شرایط تکیه‌گاهی بوجود آید. به عنوان مثال تیر مطابق شکل زیر در نظر گرفته شده و شرایط تکیه‌گاهی را در تیر مزدوج اقناع می‌گردد. توجه شود در این حالت شرایط مرزی هندسی باید تبدیل به شرایط مرزی استاتیکی گردد.

شرایط مرزی هندسی تیر واقعی:

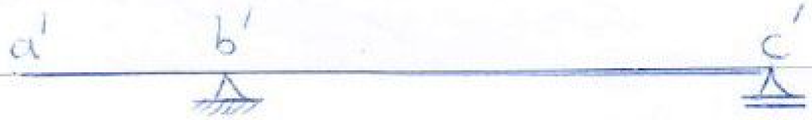
$\theta_a=0$ $\quad$ $\theta_b=$ تغییر ناپیوسته $\quad$ $\theta_c=$ وجود دارد

$\delta_a=0$ $\quad$ $\delta_b=$ وجود دارد $\quad$ $\delta_c=0$

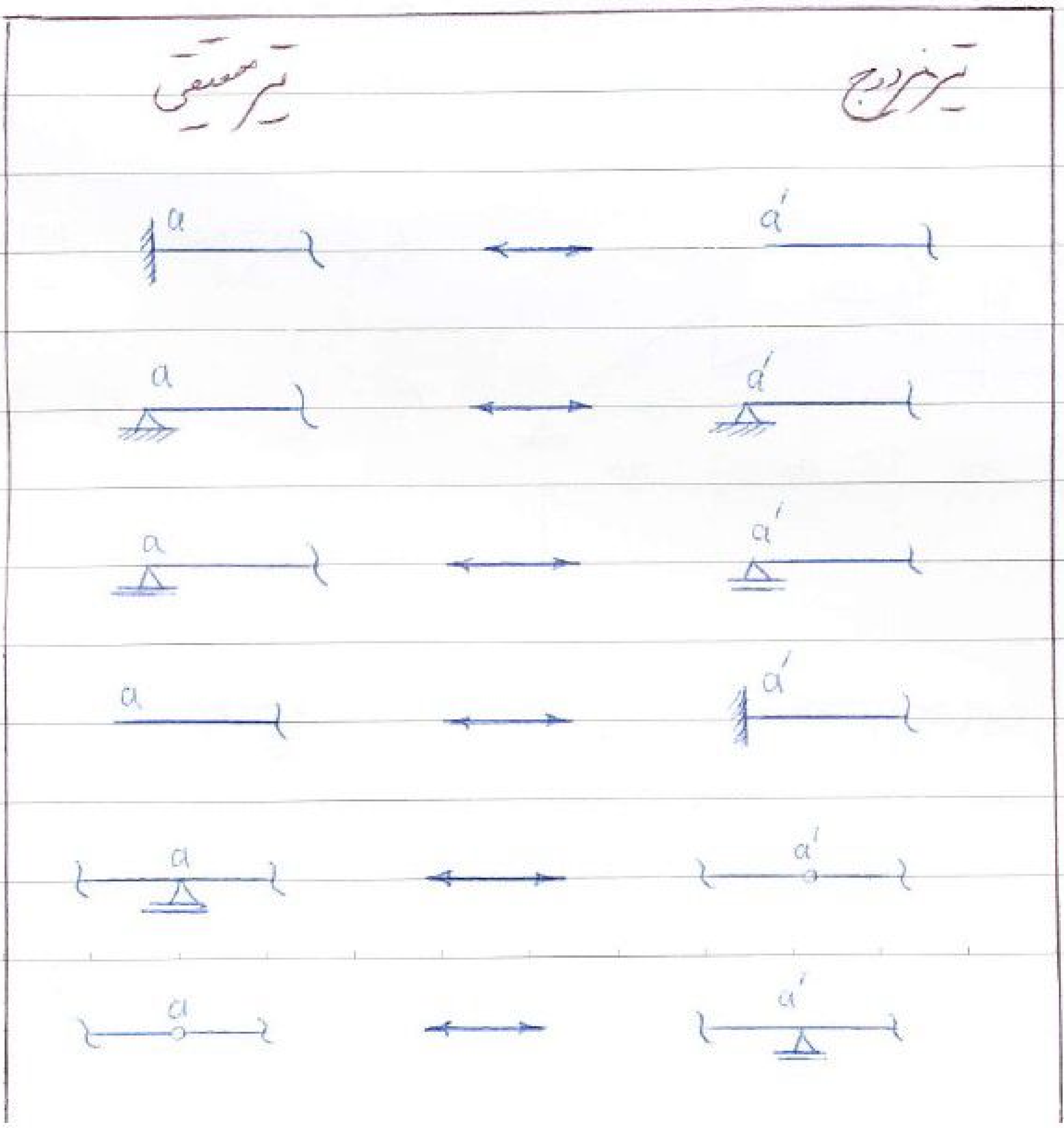
شرایط مرزی استاتیکی در تیر مزدوج:

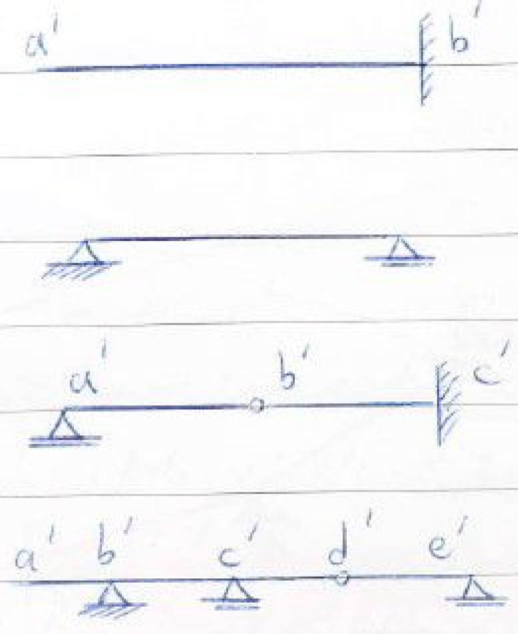
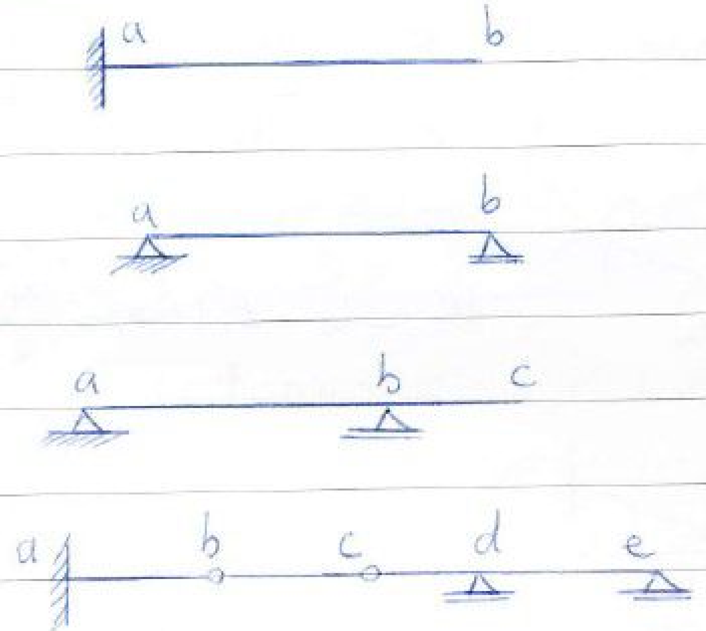
$V_{a'}=0$ $\quad$ $V_{b'}=$ تغییر ناپیوسته $\quad$ $V_{c'}=$ وجود دارد

$M_{a'}=0$ $\quad$ $M_{b'}=$ وجود دارد $\quad$ $M_{c'}=0$

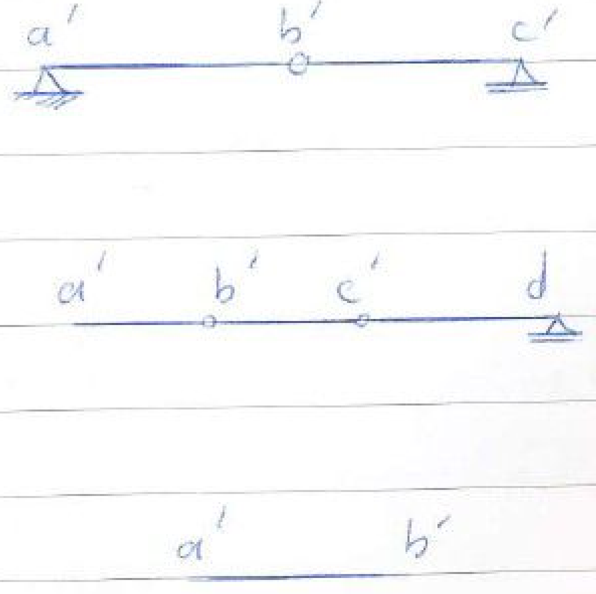
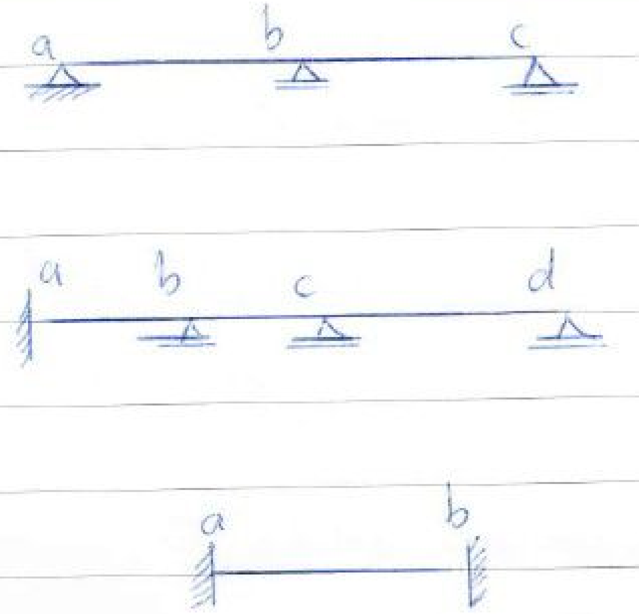


← تیر مزدوج

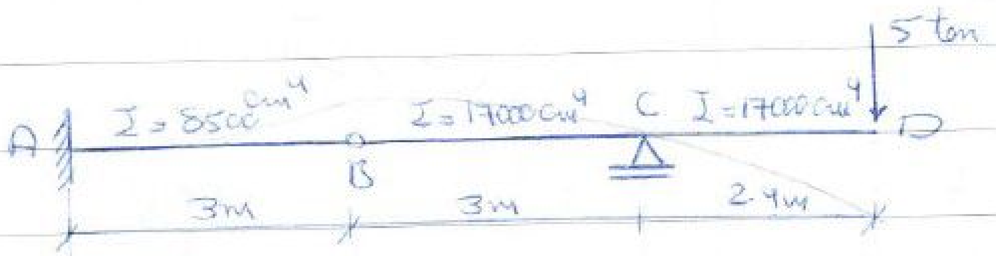


تیر مزدوج	تیر حقیقی
	

مثال‌های ارائه شده تماماً تیرهای معین بودند که تیر مزدوج مثل معین بدست می‌آید. حال چند
مثال از تیرهای نامعین ارائه می‌کنیم. ملاحظه خواهد شد که تیر مزدوج سازه‌های نامعین ناپایدارند
شرط ناپایداری این سازه‌ها ناپایداری ارتجاعی برای تحلیل تیرهای نامعین است. تحلیل در این روش نمی‌توان
استفاده نمود و حکم کرد

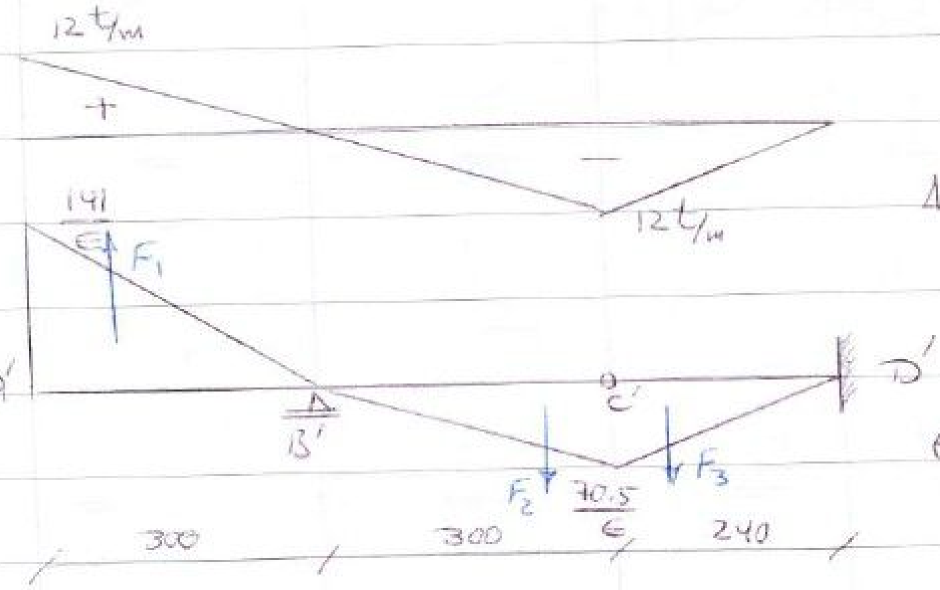
تیر مزدوج	تیر حقیقی
	

مثال: Δ_B , Δ_D , $\theta_{B_{left}}$ مطلوبست آوردن . $E = 2\times10^{6}$



$F_1 = \dfrac{21150}{E}$ $\quad F_2 = \dfrac{10575}{E}$

$F_3 = \dfrac{8460}{E}$



$\Delta B = M_B' = F_1(200) = \dfrac{423\times10^4}{2\times10^6}$

$= 2.11\ cm \uparrow$

$\theta_{B\ell} = V_{B'\ell} = F_1 = \dfrac{21150}{2\times10^6}$

$= 0.0105\ rad$

$\Delta D = M_D'$

$\Sigma M_{C'} = 0$ } ($A'B'C'$ برای)

$F_1(200+300) - F_2(100) - R_B\cdot(300) = 0 \rightarrow R_B' = \dfrac{31725}{E}$

$\Delta D = M_D' = F_1(200+300+240) - R_B'(300+240) - F_2(100+240)$

$- F_3(100) \rightarrow \Delta D = \dfrac{-642.96\times10^4}{2\times10^6} = -3.21\ cm \downarrow$

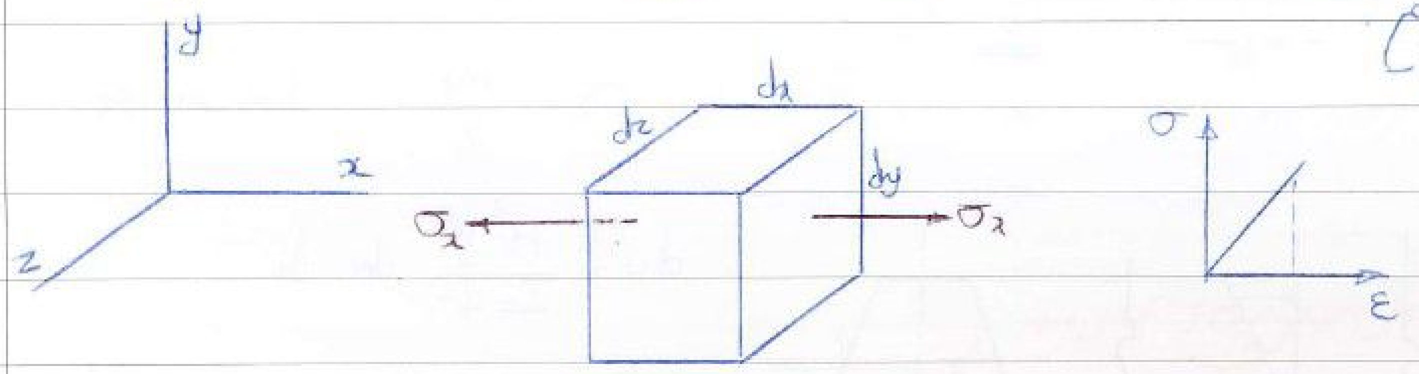
روش های انرژی:

در مکانیک انرژی به صورت ظرفیت انجام کار تعریف می‌شود و کار نیز حاصلضرب نیرو در تغییر مکان در راستای نیرو است. در اجسام جامد قابل تغییر شکل تحت بارهای الاستیک حاصلضرب تنش در سطوح مربوطه را نیرو می‌نامند و تغییر شکل های سازه تشکیل تغییر شکل های نیروهای فوق را می‌نامند. حاصلضرب این دو کمیت کار داخلی انجام شده در داخل جسم الاستیک تحت اثر نیروهای خارجی است. این کار داخلی به صورت انرژی داخلی در داخل جسم الاستیک ذخیره می‌شود. به آن انرژی کرنش داخلی گویند. در اغلب موارد در دنباله به آن انرژی داخلی گویند.

در این فصل ابتدا انرژی داخلی را مطالعه می‌کنیم، سپس با توجه به روابط انرژی روش های مختلف برای محاسبه تغییر شکل سازه ها ارائه می‌شود. خواهید دید که این محاسبات محقق تغییر شکل های جسم هستند. به این ترتیب با استفاده از آن که می‌توان تغییر شکل های جسم، محل نیروهای مجهول و ... را بدست آورد.

انرژی کرنشی داخلی برای تنش تک محوری:

یک جزء کوچک از مصالح الاستیک که تحت تنش محوری قرار دارد در نظر گرفته و برای این المان انرژی را حاصل می‌کنیم.



انرژی = نیرو × تغییر مکان

$$dU = \tfrac{1}{2}(\sigma_x\, dz\, dy)(\epsilon_x\, dx) \rightarrow dU = \tfrac{1}{2}\sigma_x \epsilon_x\, dx\, dy\, dz$$

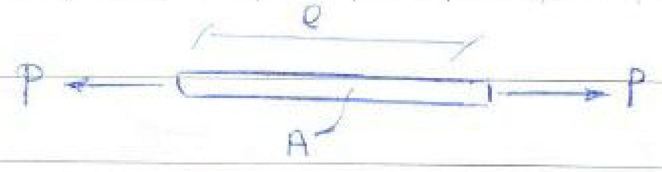
$$\rightarrow dU = \tfrac{1}{2}\sigma_x \epsilon_x\, dV \rightarrow U_0 = \frac{dU}{dV} = \tfrac{1}{2}\sigma_x \epsilon_x$$

dU/dV : انرژی کرنشی ذخیره شده در واحد حجم مصالح و یا چگالی انرژی کرنشی را بدست می‌دهد در اجسام الاستیک.

تک محوری $\rightarrow \sigma_x = E\epsilon_x \rightarrow \epsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E}$

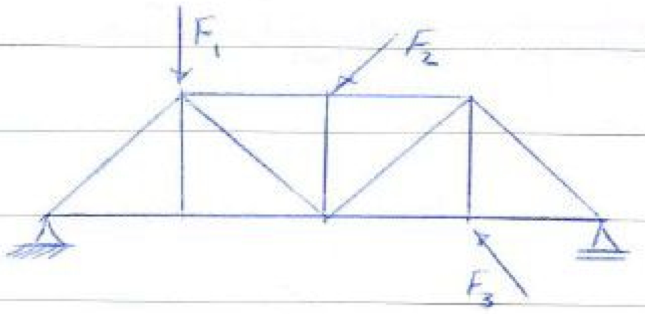
$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_x \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \longrightarrow U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\, dV$$

۱) انرژی ذخیره شده برای اعضای محوری :



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dU}{dV}=\dfrac{\sigma_x^2}{2E}\\ \sigma_x=P/A\\ dV=A\,dx\end{array}\right\} \rightarrow dU=\frac{P^2}{2EA^2}A\,dx \rightarrow U=\int_0^l \frac{P^2}{2EA}dx$$

$$U=\frac{P^2L}{2EA}$$

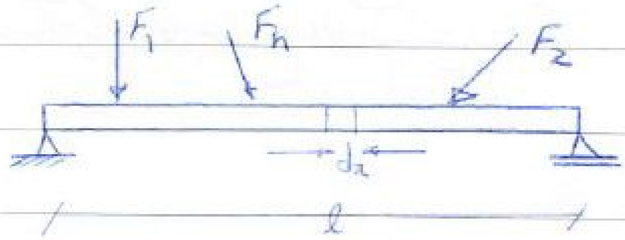


$$U=\sum \frac{P_i^2L_i}{2EA_i}$$

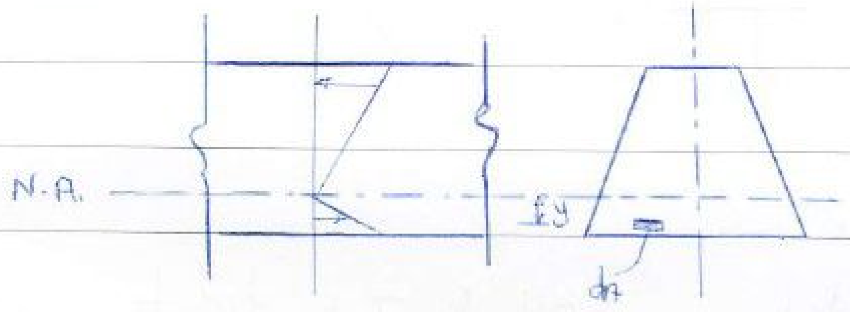
نیروی داخلی عضو i = P_i L_i : طول

سطح مقطع = A_i

۲) انرژی ذخیره شده برای اعضای خمشی (خمش خالص) :



$$\sigma_x=\frac{My}{I} \qquad dV=dA\cdot dx$$



$$dU=\frac{M^2y^2}{2EI^2}dA\cdot dx$$

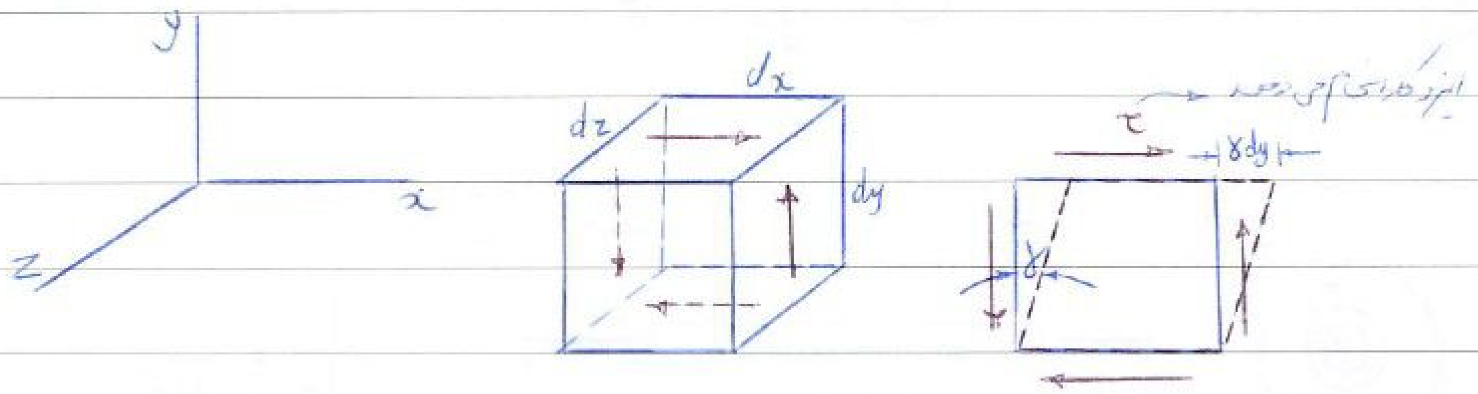
$$U=\int \frac{M^2y^2}{2EI^2}dA\,dx$$

$$\rightarrow U=\int \frac{M^2}{2EI^2}dx\int y^2dA \Rightarrow U=\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$$

M : لنگر خمشی داخلی

انرژی داخلی برای تنش‌های برشی:

مجدداً عضو کوچکی از یک جسم الاستیک تحت تأثیر تنش‌های برشی را در نظر گرفته و برای آن رابطه انرژی را حساب می‌کنیم



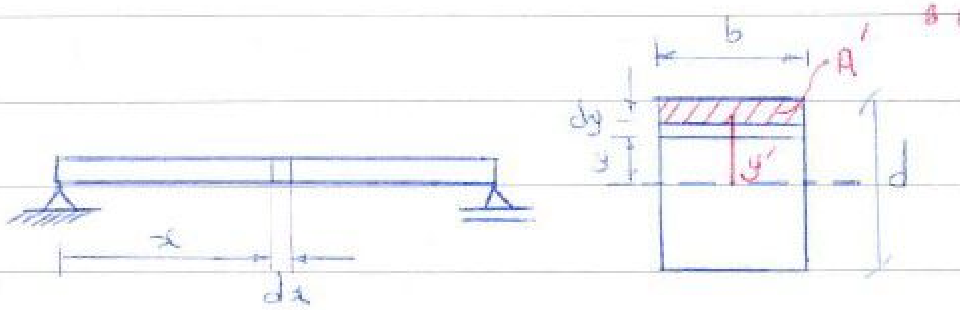
$$dU = \frac{1}{2}\tau\, dz\, dx \times \gamma dy = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dV$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau\gamma$$

$\tau = G\gamma$ G: ضریب الاستیسیته برشی   برای اجسام الاستیک

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau\frac{\tau}{G} \rightarrow U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}$$

۱۱) انرژی کرنشی داخلی برای نیروهای برشی:



$$\frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2}{2G} \qquad \tau = \frac{V_x Q}{Ib}, \quad dV = b\, dy\, dx$$

V_x: نیروی برش داخلی

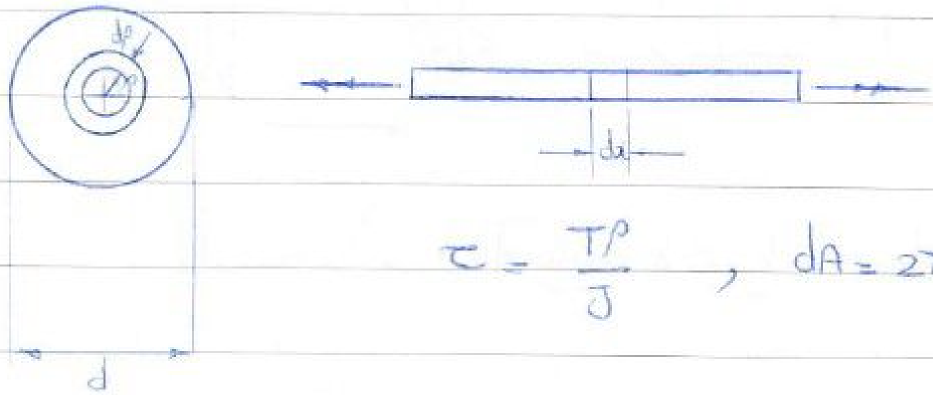
$$Q = A'y' = b\left(\frac{d}{2} - y\right)\left[y + \left(\frac{\frac{d}{2} - y}{2}\right)\right] = \frac{b}{8}\left(d^2 - 4y^2\right)$$

$$\Rightarrow dU = \frac{V_x^2\left(d^2 - 4y^2\right)^2}{128 I^2 G} dV = \frac{V_x^2\left(d^2 - 4y^2\right)^2}{128 I^2 G} b\, dx\, dy$$

$$U = 1.2\int_0^L \frac{V_x^2\,dx}{2GA} \longrightarrow U = k\int_0^L \frac{V_x^2\,dx}{2GA}$$

مقطع مستطیل : $K = 1.2$ $\qquad$ ○ : $\frac{10}{6} = 1.667$ $\qquad$ I : $K = 1$

۱۲) انرژی کرنشی داخلی برای لنگر پیچشی :



$$\frac{dU}{dV} = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad , \quad dA = 2\pi\rho\,d\rho \longrightarrow dV = 2\pi\rho\,d\rho\,dx$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2}\frac{T^2\rho^2}{GJ^2}\,2\pi\rho\,d\rho\,dx \longrightarrow U = \int \frac{1}{2}\frac{T^2\rho^2}{GJ^2}\,2\pi\rho\,d\rho\,dx$$

$$\longrightarrow U = \int \frac{1}{2}\frac{T^2}{GJ^2}\,dx\int_0^c 2\pi\rho^3\,d\rho = \int \frac{1}{2}\frac{T^2}{GJ^2}\,dx\;2\pi\frac{c^4}{4} \qquad J = \frac{\pi c^4}{2}$$

$$U = \int \frac{T^2}{2GJ}\,dx$$

مقطع مستطیل : $J = cb^3h$ $\quad$ h ضلع بزرگ $\quad$ b ضلع کوچک $\quad$ $c = \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right]$

انرژی کرنشی برای تنش های چند محوره :

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx}$$

با استفاده از قانون عمومی هوک :

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right)$$

$$+ \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)$$

تنش صفحه‌ای:

$$\sigma_z = 0 \qquad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\sigma_y^2}{2E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

وقتی عضوی تحت ترکیب نیروهای محوری، خمشی، برشی و پیچشی باشد از آن جایی که انرژی تابع اسکالر است، می‌توان انرژی برای نیروهای داخلی مختلف محاسبه نمود و آن‌ها را با هم جمع کرد.

$$U = \frac{P^2L}{2EA} + \int \frac{M^2}{2EI}dx + k\int \frac{V_x^2}{2GA}dx + \int \frac{T^2}{2GJ}dx$$

محاسبه تغییر مکان‌ها با استفاده از روش‌های انرژی:

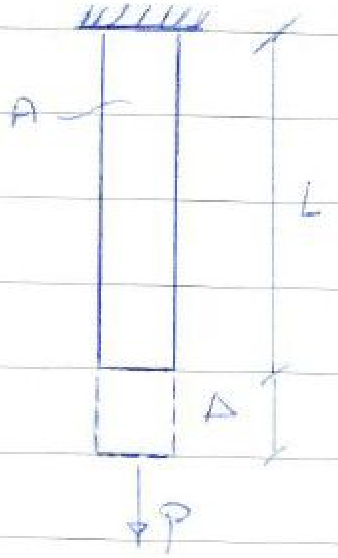
با استفاده از روابط حاصل شده برای انرژی ذخیره شده در اعضای الاستیک روش‌های مختلفی ارائه می‌گردد.

۱) روش کار حقیقی: از لحاظ مفهومی این روش بسیار قابل فهم و دارای مفهوم روشنی برای روش‌های دیگر است اما از لحاظ کاربردی بسیار ضعیف و محدود است. مبنای این روش براساس اصل بقای انرژی است

انرژی داخلی = کار خارجی

$U = \int_0^l \frac{P^2dx}{2EA}$ عضو محوری	$U = \int_0^l \frac{M^2dx}{2EI}$ عضو خمشی
$U = k\int_0^l \frac{V_x^2dx}{2GA}$ عضو برشی	$U = \int_0^l \frac{T^2dx}{2GJ}$ عضو پیچشی

مثال ۱: مقدار تغییر مکان در انتهای تیر یکسر گیردار مقطع ثابت چیست؟

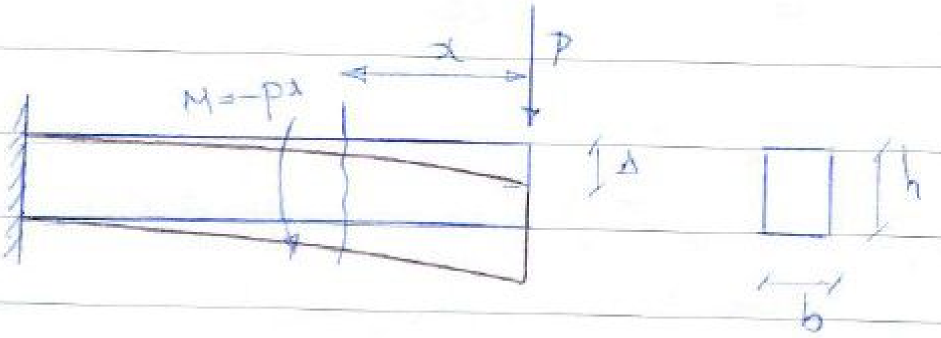


$$W_e = \frac{1}{2} P\Delta$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{P^2 L}{EA}$$

$$\rightarrow W_e = U \Rightarrow \Delta = \frac{PL}{EA}$$

مثال ۲: مقدار تغییر مکان در انتهای تیر مقطع تحت بار P را بدست آورید.



$W_e = \frac{1}{2} P\Delta$ $\qquad U = U_b + U_s$ $\qquad$ انرژی خمش + انرژی برش

$$U_b = \int_0^l \frac{M^2}{2EI}dx = \int_0^l \frac{P^2x^2}{2EI}dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$U_s = 1.2\int_0^l \frac{V_x^2}{2GA}dx = 1.2\int_0^l \frac{P^2}{2GA}dx = \frac{1.2P^2 l}{2GA}$$

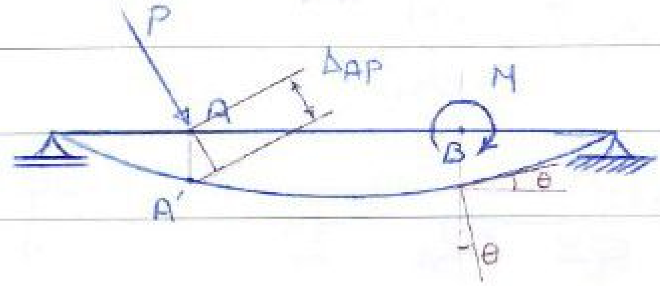
$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{1.2P^2L}{2GA} \rightarrow \Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{خمش}} + \underbrace{\frac{1.2PL}{GA}}_{\text{برش}}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\frac{h^2}{L^2}\right) = \Delta_b\left(1 + 0.75\frac{h^2}{L^2}\right)$$

$h/L = 1/10$ تا $1/30$ $\qquad$ L طول تیر $\qquad$ h ارتفاع مقطع

کاستیلیانو (Castigliano)

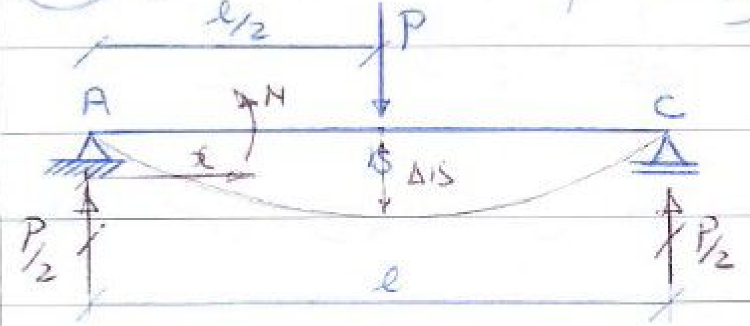
ثابت می شود مشتق جزئی تابع انرژی در یک جسم الاستیک که در حرارت ثابت بوده و تکیه گاه های آن فاقد نشست است، مساوی است با تغییر مکان الاستیک نقطه اثر نیرو در امتداد نیرو.



$$\Delta_{AP} = \frac{\partial U}{\partial P}$$

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M}$$

مثال: در تیر نشان داده شده مطلوبست تعیین تغییر مکان قائم نقطه B فقط به علت انرژی خمشی. (EI ثابت)



$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

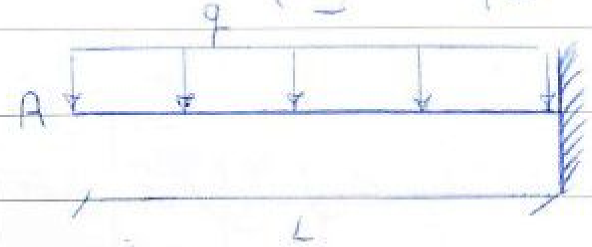
$$\Delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$\Rightarrow \Delta_B = 2\int_0^{l/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \qquad M = \frac{P}{2}x \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

$$\Delta_B = 2\int_0^{l/2} \frac{Px}{2EI} \times \frac{x}{2} dx = \frac{P}{2EI}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{P}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

$$\rightarrow \Delta_B = \frac{PL^3}{48EI}$$

در روش کار حقیقی همواره باید یک نیرو در محل مورد نظر در تابع انرژی می داشتیم اما در این روش نیازی ندارد.

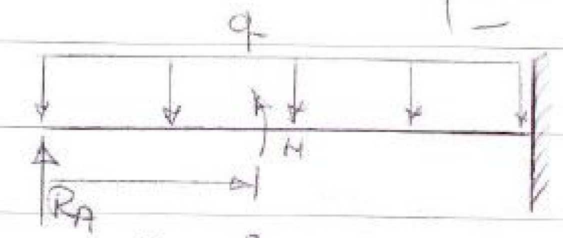


(EI ثابت)

مثال: در تیر نشان داده شده مطلوبست Δ_A در امتداد قائم و θ_A (فقط تغییر شکل ناشی از خمش)

در نقطه مورد نظر باید نیرویی در راستای مورد نظر وجود داشته باشد تا بتوان از تابع انرژی نسبت به آن مشتق جزئی گرفت. بنابراین نیروی فاکتیو R_A در امتداد قائم (مورد نظر) به انتهای تیر اثر می دهیم. قضیه کاستیلیانو را اعمال نموده پس از مشتق گیری نیروی

نیروی اضافی می‌گذاریم. حال اگر در نقطه مورد نظر نیروی عددی موجود باشد آن عدد را به طور موقت به پارامتر تبدیل می‌کنیم. پس از مشتق‌گیری مجدداً پارامتر را برابر عدد قرار می‌دهیم.



$$\Delta_A \uparrow = \frac{\partial u}{\partial R_A}$$

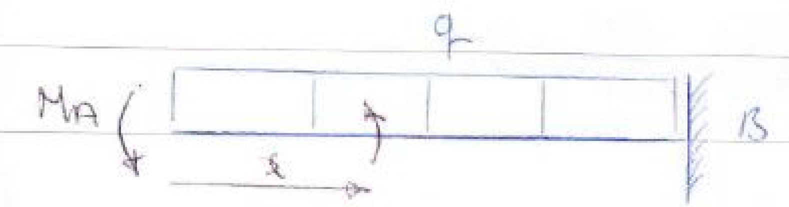
$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \qquad \Delta_A = \frac{\partial u}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_A} dx$$

$$\rightarrow M = R_A x - \frac{q x^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\Rightarrow \Delta_A = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\cancel{R_A x} - \frac{q x^2}{2}\right) x\, dx = \frac{-q}{EI} \left(\frac{x^4}{8}\right)\Big]_0^l = -\frac{q l^4}{8EI}$$

علامت منفی برای Δ_A حاکی است که تغییر مکان در خلاف نیروی پارامتری R_A است.

تعیین θ_A:

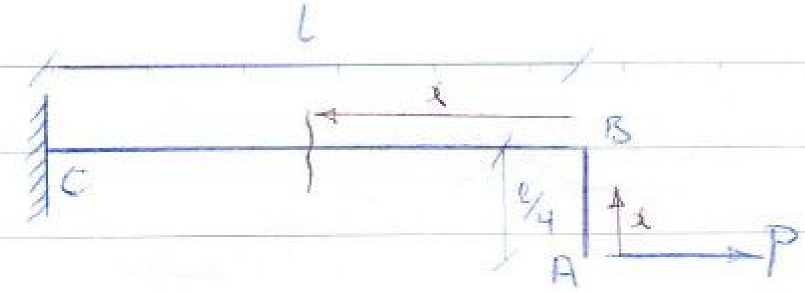


$$U = \int \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} dx \qquad M = -M_A - \frac{q x^2}{2} \qquad \frac{\partial M}{\partial M_A} = -1$$

$$\theta = \int_0^l \frac{1}{EI} \left(M_A - \frac{q x^2}{2}\right)(-1)\, dx = \frac{q}{EI} \int_0^l x^2 dx = \frac{q}{EI} \frac{l^3}{6} = \frac{q l^3}{6EI}$$

مثال: در شکل نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را حساب نمایید. (تغییر شکل برشی را چشم‌پوشی کنید)
هدف از این مثال این است که نشان دهیم لازم است انتگرال‌گیری تابع انرژی برای تمام اعضا باید حساب شود.



$$U=\int_A^B \frac{M^2}{2EI}\,dx+\int_B^C \frac{M^2}{2EI}\,dx$$

$$\text{افقی } \vec{\Delta}_A=\frac{\partial U}{\partial P}=\int_A^B \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,dx+\int_B^C \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,dx$$

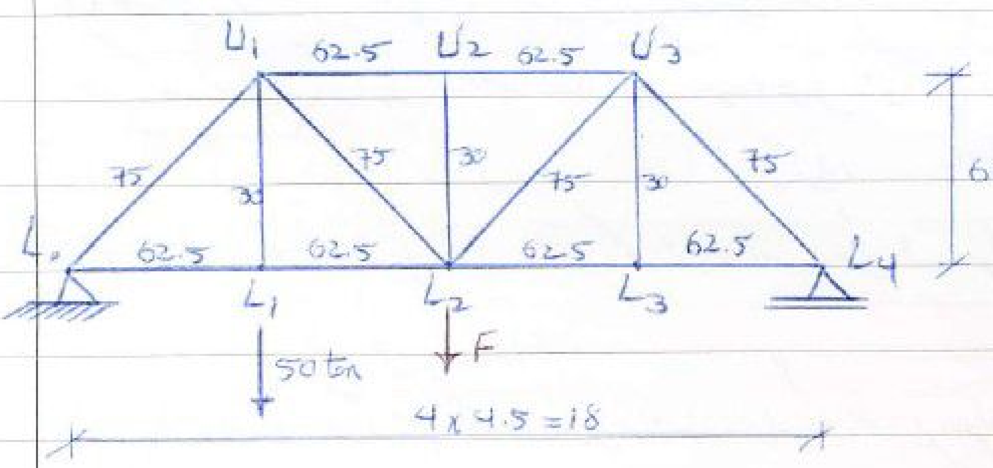
$M=Px \rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial P}=x$ ناحیه AB

$M=\dfrac{PL}{4} \rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial P}=L/4$ ناحیه BC

$$\Delta A=\int_0^{L/4}\frac{Px}{EI}\,x\,dx+\int_0^{L}\frac{PL}{4EI}\,\frac{L}{4}\,dx=\frac{13PL^3}{192EI}$$

مثال: مطلوبست تغییر مکان قائم نقطه L_2 در خرپای نشان داده شده در شکل. اعداد نوشته شده روی اعضا سطح مقطع اعضا برحسب cm^2 می باشد.

با توجه به اینکه در L_2 نیروی بار خارجی وجود ندارد لازم است نیروی مجازی F در آن قرار داده شود.



$$U=\sum \frac{P^2L}{2EA}$$

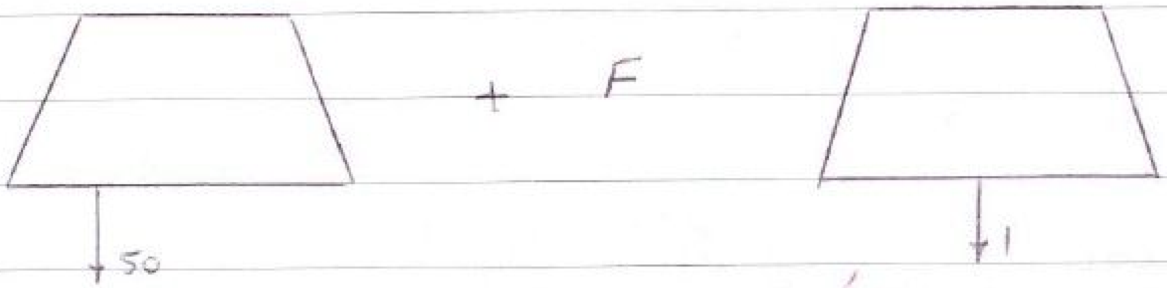
$$\Delta L_2=\sum \frac{PL}{EA}\frac{\partial P}{\partial F}=\frac{1}{E}\sum \frac{L}{A}P\frac{\partial P}{\partial F}$$

نیرو = kg　طول = cm

عضو	L	A	L/A	نیروی داخلی اعضا kg		$\partial P/\partial F$	$P\frac{L}{A}\frac{\partial P}{\partial F}$
واحد	cm	cm^2	1/cm	بار خارجی	F	kg/kg	kg/cm
L_0L_1	450	62.5	7.2	28125	0.375F	0.375	75937.5
L_1L_2	450	62.5	7.2	28125	0.375F	0.375	75937.5
L_4U_3	750	750	10	-15625	-0.625F	-0.625	97656.25

برای حل مسئله لازم است خرپا برای بارگذاری نشان داده شده تحلیل شود. همچنین نیروی بار قائم یک واحد در تحلیل خرپا وقتی که مورد نیاز خواهد بود. توصیه می‌شود در این حالت خرپا یکبار به تنهایی برای بارهای خارجی عادی و یکبار برای بار یا قائم مساوی واحد تحلیل شده و نتایج دو تحلیل با هم ترکیب شوند. این کار ساده‌تر خواهد شد.

$$\frac{\Delta L}{2} = \frac{795625}{2\times10^6} = 0.4\,cm \downarrow$$



روش کار مجازی برای محاسبه تغییر شکل سازه‌ها:

کار مجازی در مکانیک سازه‌ها در دو حالت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

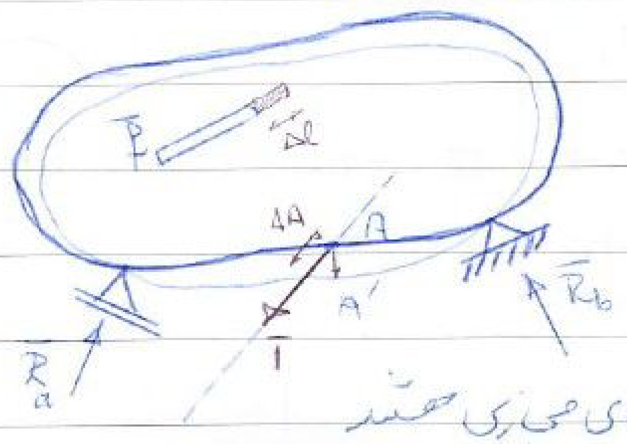
۱) در صورتیکه نیروها واقعی و تغییر مکان مجازی باشد. این شیوه در روش استاتیک برای محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی به کار می‌رود.

۲) حالتی که تغییر شکل‌ها حقیقی و نیروها مجازی است. این شیوه در محاسبه تغییر شکل‌ها استفاده می‌شود یعنی یک نیروی مجازی واحد بر سازه اعمال می‌گردد.

گام اول: یک نیروی مجازی بر سازه اعمال می‌گردد.

گام دوم: تغییر شکل‌های واقعی که می‌توانند ناشی از بارهای خارجی یا اثر حرارت و یا نشست تکیه‌گاهی باشد بر سازه اعمال می‌گردد.

گام سوم: معادل می‌نویسیم کار مجازی داخلی برابر کار مجازی خارجی. این رابطه معادل تغییر مکان نقطه مورد نظر را در امتداد بار واحد مجازی بدست می‌دهد.



$\bar{1}$: بار واحد مجازی خارجی

$\bar{P}$: نیروی داخلی مجازی

$\bar{R}_b , \bar{R}_a$: واکنش‌های مجازی

* در روابط مورد استفاده بالا تمام علائمی که نمایانگر کمیت‌های مجازی هستند یک خط تیره قرار دارد.

کار مجازی خارجی = کار مجازی داخلی

$$\underbrace{W_R + \bar{1} \times \Delta_A}_{\text{بار مجازی}} = \sum(\bar{f} \cdot \overbrace{\Delta L}^{\text{تغییر شکل حقیقی}})$$

W_R : کار مجازی واکنش های تکیه گاهی به علت نشست تکیه گاهی

۱) رابطه کار مجازی در خرپاها :

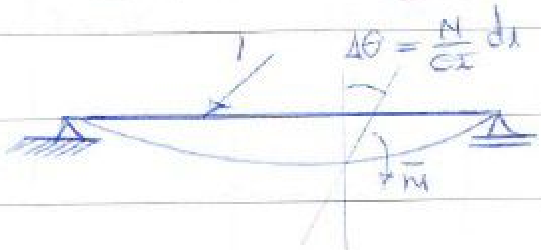
الف) به علت بارهای خارجی :

$$W_R + \bar{1} \times \Delta_A = \sum(\bar{f} \cdot \frac{PL}{EA})$$

ب) به علت تغییرات دما :

$$W_R + \bar{1} \times \Delta_A = \sum \bar{f}(\alpha \Delta T L)$$

۲) رابطه کار مجازی در تیرها به علت انرژی خمشی :



$$W_R + \bar{1} \underset{\Delta\theta}{\Delta A} = \int \bar{m} \cdot \frac{M}{EI} dx$$

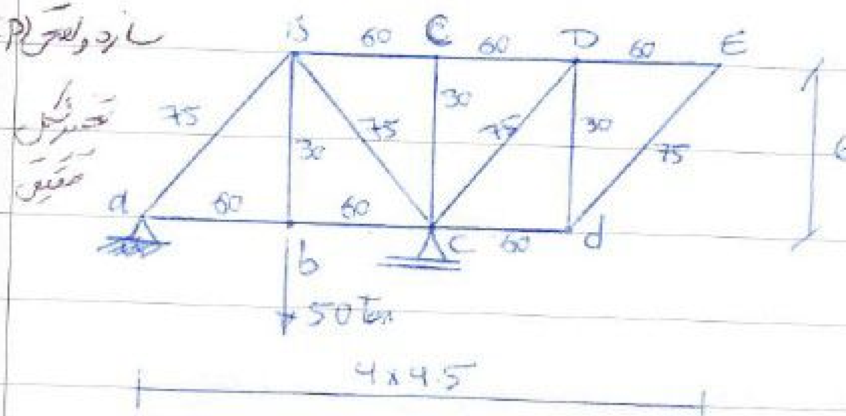
$m \cdot \theta \sim f \cdot l \sim$ انرژی

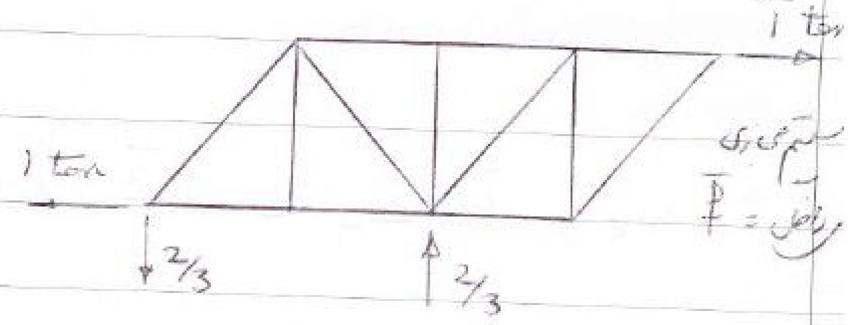
کاربرد روش کار مجازی :

۱) خرپاها :

مثال : در خرپای شکل داده شده تغییر مکان نقطه E را بدست آورید. (اعداد داده شده سطح مقطع برحسب cm^2 می باشند)

$$E = 2\times10^6 \, kg/cm^2 = 2\times10^3 \, ton/cm^2$$





$$\overline{W}_R + \overline{T} \times \overrightarrow{\Delta E} = \sum \overline{F} \cdot \frac{PL}{EA}$$

$\overline{F}\,\frac{PL}{A}$ ton^2/cm	P ton	$\overline{F}$ ton	$\frac{L}{A}$ $1/cm$	A cm^2	L cm	عضو واحد
70.4	+18.75	+0.5	7.5	60	450	ab
70.4	+18.75	+0.5	7.5	60	450	bC
-260	-31.25	+0.83	10	75	750	aB
+260	-31.25	+0.83	10	75	750	Bc
$\Sigma =$ 140.8						

عناصری که یکی از نیروهای P یا $\overline{F}$ برای آن‌ها صفر شده است در جدول نوشته نشده است.

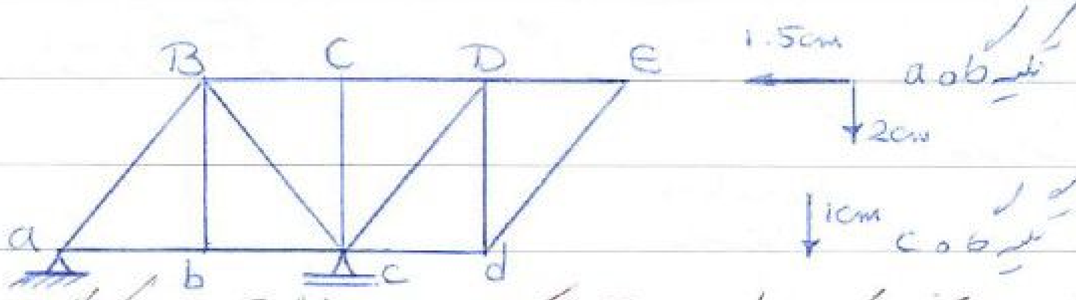
$$T\Delta = \frac{1}{2000} \times 140.8 = 0.0704 \Rightarrow \Delta = 0.0704\,cm \rightarrow$$

با توجه به اینکه علامت Δ مثبت بدست آمده است پس این است در جهت تغییر مکان هم جهت بار واحد می‌باشد.

به طور خلاصه:

$$W_R + \overline{T} \times \Delta = \sum \frac{\overline{F}_i \cdot P_i L_i}{E \cdot A_i}$$

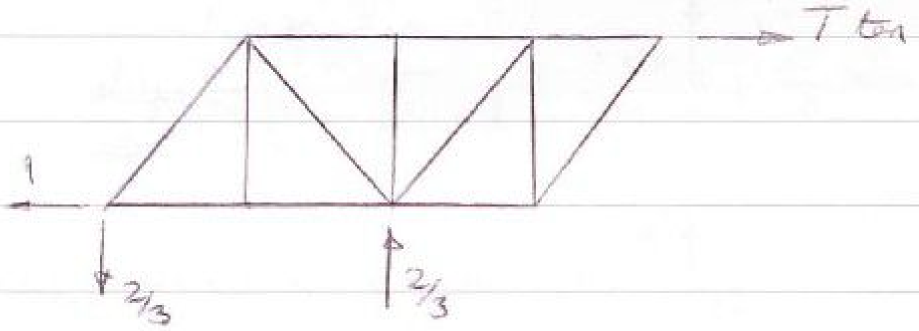
مثال: در خرپای مثال قبل تغییر مکان افقی گره E را به علت نشست های تکیه گاهی زیر بیابید.



برای حل در نقطه E بار واحد مجازی را در امتداد افقی اثر می دهیم تا سیستم مجازی بدست آید. اکنون تغییر مکان های واقعی را که همان نشست های تکیه گاهی باشند بر سیستم مجازی اعمال می نماییم. کارهای خارجی موجود ناشی از بار واحد مجازی 1 ton و کار واکنش های تکیه گاهی مجازی است. کار داخلی موجود نیست چون P برای اعضای داخل صفر است و یا به عبارتی دیگر در اثر نشست های تکیه گاهی هیچگونه تغییر طولی در اعضا ایجاد نمی شود.

$$\overline{W}_R + 1 \times \vec{\Delta}_E = \sum \bar{f} \frac{PL}{EA} \rightarrow (2/3)(2) + (1)(1.5) - 2/3 \times 1 + 1 \times \Delta E = 0$$

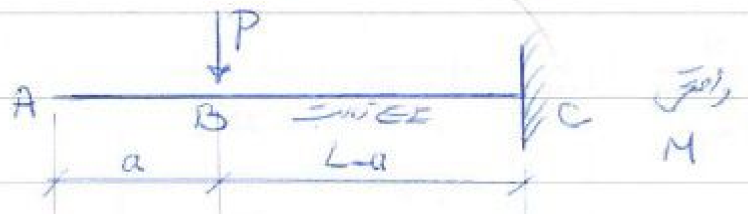
$$\rightarrow 1 \times \Delta E = -2.17 \Rightarrow \Delta_E = 2.17\,cm$$



1 ton در نقطه مورد نظر در امتداد مورد نظر اعمال گردد.

۲) تیرها:

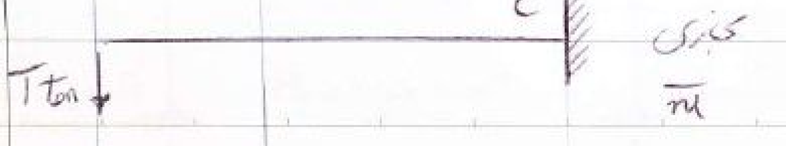
در تیر نشان داده شده تغییر مکان قائم نقطه a را محاسبه نمایید. (فقط اثر خمش منظور گردد)



$$1 \times \Delta_A^{\downarrow} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$$

$$\bar{f} \cdot \delta$$

$$\bar{m} \cdot d\theta$$



حال با معادل کار این کار را می دهند.

$$1 \times \Delta_A \downarrow = \int_A^B + \int_B^C$$

در محاسبات انتگرال گیری این است که جدا محاسبات برای هر قسمت امکان پذیر می باشد
بطور مستقل

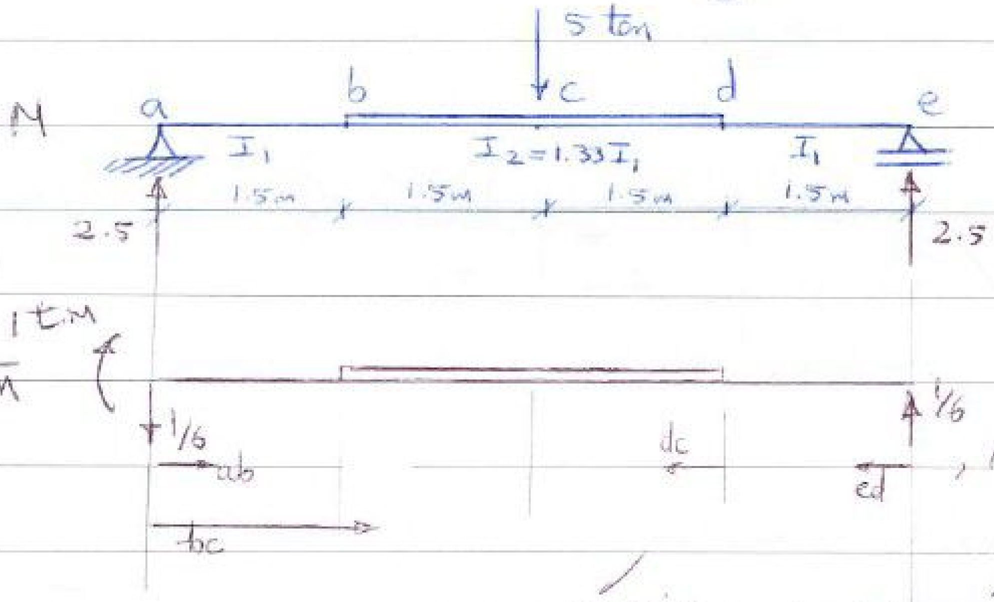
ناحیه AB ، $0<x<a$: $M=0 \quad \bar{m}=x(-1)$

ناحیه BC ، $0<x<L-a$: $M=-px \quad \bar{m}=-1(a+x)$

$$1 \times \Delta_A \downarrow = 0 + \frac{1}{EI}\int_0^{L-a} [-(a+x)][-px]\,dx$$

$$\rightarrow \Delta_A \downarrow = \frac{P}{6EI}(L-a)^2(2L+a)$$

مثال: در تیر نشان داده شده دوران نقطه A را بیابید.



$E = 2\times10^3\ t/cm^2$

$I_1 = 6200\ cm^4$

$I_2 = 8260\ cm^4$

$$1 \times \vec{\alpha}_a = \int \bar{m} M \frac{dx}{EI}$$

در طول محدوده انتگرال گیری توابع $\bar{m}$ ، M ، I باید پیوسته و بلاواسطه باشند.

بنابراین در این مسئله لازم است انتگرال گیری در چهار محدوده انجام گردد.

$$1 \times \vec{\alpha}_c = \int_a^b + \int_b^c + \int_e^d + \int_d^c$$

$$= \frac{1}{EI_1}\left[\int_a^b \bar{m} M\,dx + \int_b^c \bar{m} M \frac{dx}{1.33} + \int_e^d \bar{m} M\,dx + \int_d^c \bar{m} M \frac{dx}{1.33}\right]$$

x	I	$\bar{m}$	M	قطعه
$0<x<1.5$	I_1	$1-x/6$	$2.5x$	$b \to a$
$1.5<x<3$	$1.33I_1$	$1-x/6$	$2.5x$	$c \to b$
$0<x<1.5$	I_1	$x/6$	$2.5x$	$d \to e$
$0<x<1.5$	$1.33I_1$	$1/6(1.5+x)$	$2.5(1.5+x)$	$c \to d$

$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \frac{1}{EI_1}\Big[\int_0^{1.5}(1-x/6)(2.5x)\,dx + \int_{1.5}^{3}(1-x/6)(2.5x)\frac{dx}{1.33}$$

$$+\int_0^{1.5}(x/6)(2.5)x\,dx + \int_0^{1.5}(1/4+x/6)(3.75+2.5x)\,\frac{dx}{1.33}\Big]$$

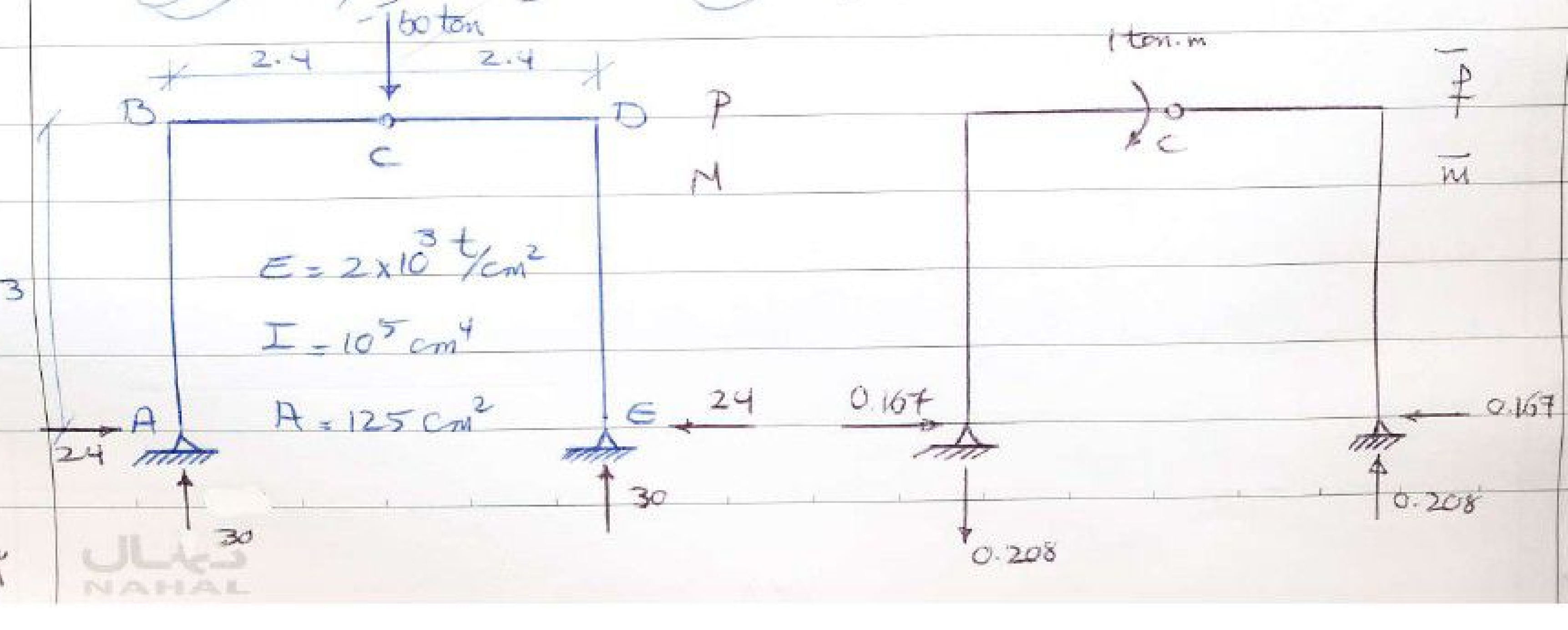
$$=\frac{1}{EI_1}\Big[\left(\frac{5.5x^2}{2}-\frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5}+\frac{1}{1.33}\left(\frac{2.5x^2}{2}-\frac{x^3}{7.2}\right)_{1.5}^{3}$$

$$+\left(\frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5}+\frac{1}{1.33}\left(\frac{3.75}{4}x+\frac{5}{8}x^2+\frac{x^3}{7.2}\right)_0^{1.5}\Big]=\frac{9.157}{EI_1}$$

$$\rightarrow \alpha_a = 0.0074\ Rad$$

۳) قاب‌ها:

در قاب شکل داده شده دوران نسبی دو طرف لولای C را بیابید (اثر تغییر شکل های محوری منظور گردد)



$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx + \Sigma \bar{f} \frac{PL}{EA}$$

$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \int_A^B \bar{m} M \frac{dx}{EI} + \int_B^C + \int_E^D + \int_D^C + \Sigma \bar{f} \frac{PL}{EA}$$

مقادیر $\bar{m}$ و M و $\bar{f}$ و P در نواحی مختلف تعریف می‌شوند.

$L=3$, $0<x<3$ $\begin{cases} \bar{f} = 0.208 \\ P = -30 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.167x$, $M = -24x$ از B تا A

$L=2.4m$, $0<x<2.4$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.167 \\ P = -24 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.5 - 2.08x$, $M = -72 + 30x$ از C تا B

$L=3$ $0<x<3$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.208 \\ P = -30 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.167x$, $M = -24x$ از D تا E

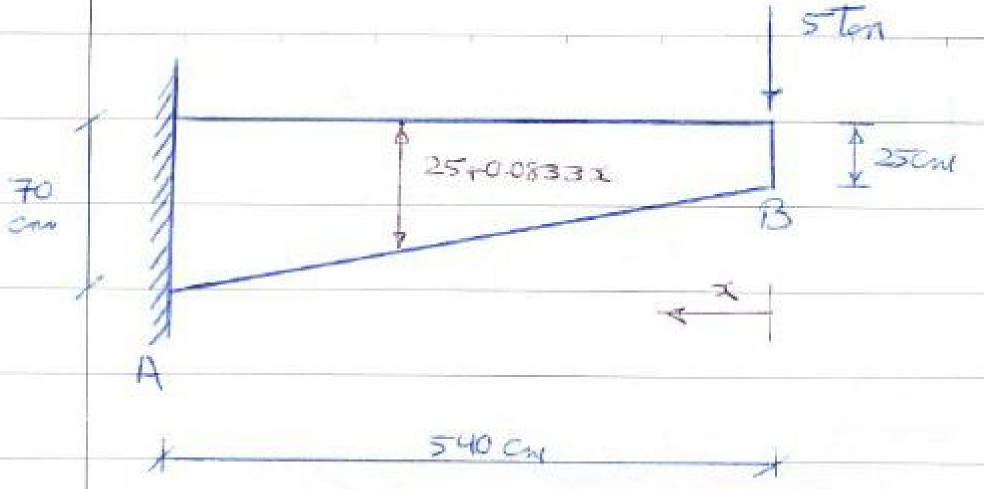
$L=2.4$ $0<x<2.4$ $\begin{cases} \bar{f} = -0.167 \\ P = -24 \end{cases}$ $\bar{m} = -0.5 + 0.208x$, $M = -72 + 30x$ از C تا D

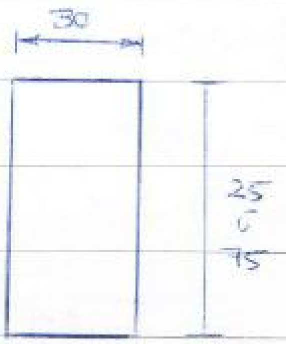
$$1 \times \overrightarrow{\alpha_a} = \frac{1}{EI}\Big[2\int_0^3 (-0.176x)(-24x)\,dx + \int_0^{2.4} (-0.5 - 0.208x)(-72 + 30x)\,dx$$

$$+ \int_0^{2.4} (-0.5 + 0.208x)(-72 + 30x)\,dx \Big] + \frac{2}{EA}(0.167)(-24)(2.4)$$

$$= \frac{158.5}{EI} + \frac{19.2}{EA} = 0.00793 + 0.0000768 = 0.008 \text{ Rad.}$$

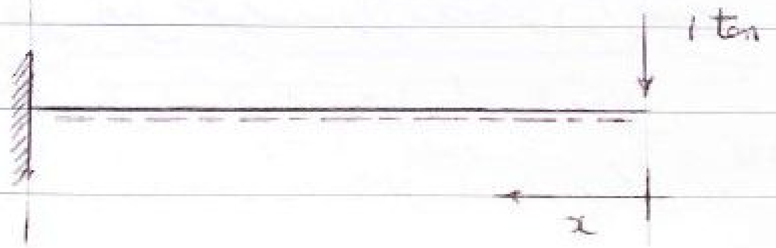
۴) تیرها با ممان اینرسی متغیره





$E = 20\times10^5 \frac{kg}{cm^2}$

$\boxed{\Delta B = ?}$



$$1\times\Delta_B^{\downarrow} = \int_0^L \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$

$\bar{m} = -x$ ton.cm, $M = -5x$ ton.cm , $I = 30(25+0.0833x)^3\times\frac{1}{12}$

$E = 20\times10^2\ ton/cm^2$

$$\Delta_B = \frac{1}{E}\int\frac{(-5)(-5x)\,dx}{\frac{30(25+0.0833x)^3}{12}} = \frac{2\times10^6}{833^3E}\int_0^{540}\frac{x^2\,dx}{(300+x)^3}$$

$y = a+x \longrightarrow x = y-a \Rightarrow dx = dy$

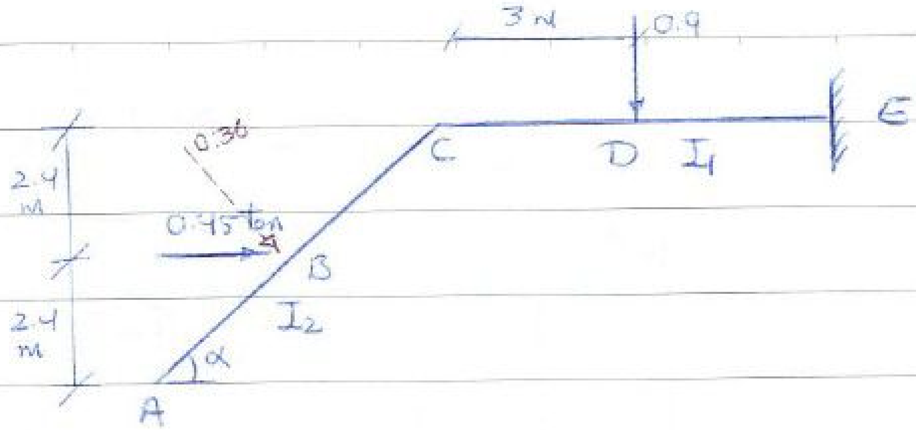
$$\longrightarrow \Delta_B = \frac{2\times10^6}{833^3E}\int_{300}^{840}\frac{(y-300)^2}{y^3}\,dy = A\left[\int_{300}^{840}\frac{dy}{y} - 600\int_{300}^{840}\frac{dy}{y^2} + 9000\int_{300}^{840}\frac{dy}{y^3}\right]$$

$$= A\left[\ln y + \frac{600}{y} - \frac{90000}{2y^2}\right]_{300}^{840} = 3.11\ cm$$

درصورتیکه امکان انتگرال‌گیری سریع وجود نداشته باشد، استفاده از انتگرال‌گیری‌های عددی توصیه می‌شود. (در کتاب روش ارائه شده)

۵) سازه‌ها با اعضای شیبدار

در سازه نشان داده شده تغییر مکان افقی نقطه A را حساب کنید. (فقط اثر تغییر شکل‌های خمشی منظور گردد)

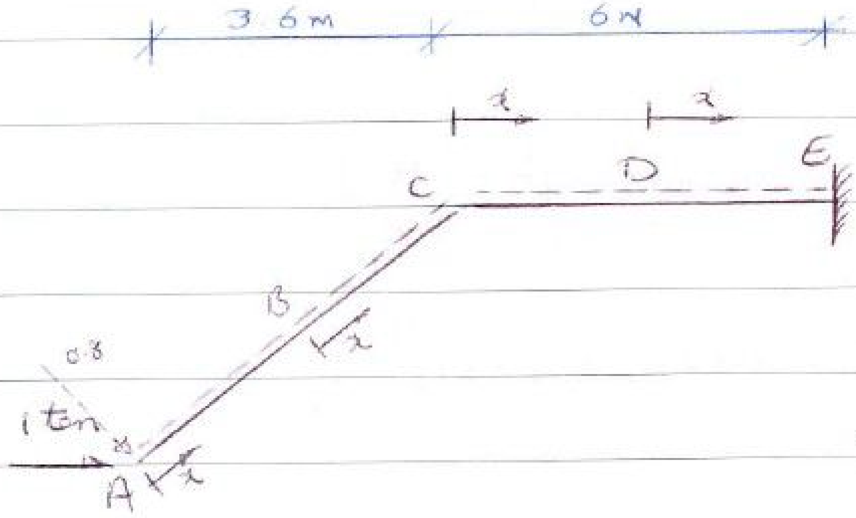


$E = 2100\ ton/cm^2$

$$\begin{cases} I_1 = 15625\ cm^4 \\ I_2 = 7810\ cm^4 \end{cases}$$

$\sin\alpha = 0.8 \qquad \cos\alpha = 0.6$

در اعضای شیبدار انتگرال می‌بایستی در طول کامل عضو شیبدار گرفته شود و از تصویر عضو مایل استفاده نکنیم. چون این انتگرال نشان دهنده کار داخلی ناشی از نیروهای داخلی است و این کار باید در طول کامل عضو محاسبه گردد.



$$1 \times \delta_A = \int \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$

B تا A : $M = 0 \qquad \bar{m} = 0.8x\ ton.m \qquad 0 < x < 3$

C تا B : $M = 0.36x \qquad \bar{m} = 2.4 + 0.8x\ ton.m \qquad 0 < x < 3$

D تا C : $M = 1.08\ ton.m \qquad \bar{m} = 4.8\ ton.m \qquad 0 < x < 3$

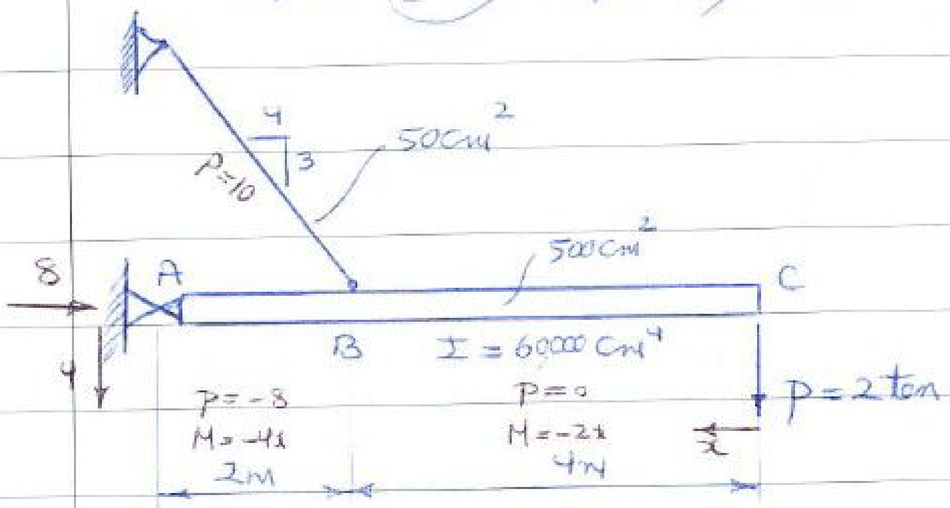
E تا D : $M = 1.08 + 0.9x \qquad \bar{m} = 4.8\ ton.m \qquad 0 < x < 3$

$$E\delta_A = \int_0^3 \frac{(2.4+0.8x)(0.36x)}{7810\times10^{-8}}\,dx + \int_0^3 \frac{4.8(1.8)}{15625\times10^{-8}}\,dx + \int_0^3 \frac{4.8(1.08+0.9x)}{15625\times10^{-8}}\,dx$$

$$= \frac{64.156}{15625\times10^{-8}} \implies \delta_A = 1.96\ cm$$

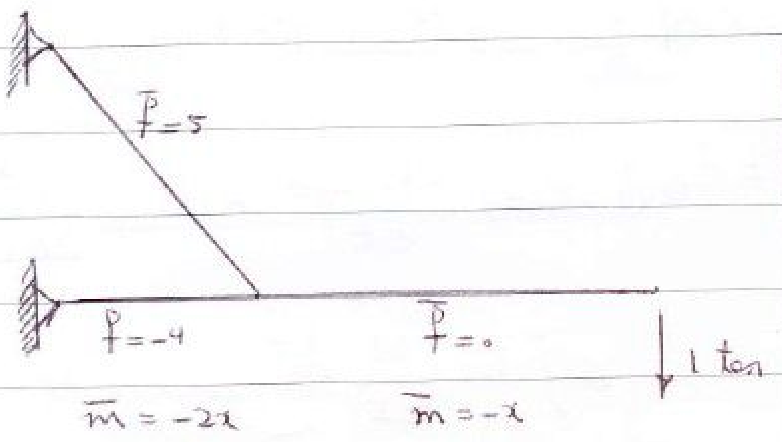
۶) سازه‌های ترکیبی:

سازه‌هایی را گویند که در آن‌ها هم اعضای خمشی و هم اعضای محوری وجود دارد. در این نوع سازه‌ها حتی اگر در صورت مسئله ذکر نشده باشد، انرژی محوری همراه با انرژی خمشی باید منظور گردد.



در سازه نشان داده شده تغییر مکان قائم نقطه C را محاسبه نمایید.

$$\bar{1} \times \Delta_C = \sum \bar{f}\,\frac{PL}{EA} + \int_0^L \bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$



عضو	$\bar{f}$ (ton)	P (ton)	L (cm)	A (cm^2)	$\bar{f}\,\frac{PL}{A}$
DB	+5	+10	250	50	250
AB	−4	−8	200	500	12.8
				Σ	$262.8\ \frac{ton^2}{cm}$

$$\sum \bar{f}\,\frac{PL}{EA} = \frac{262.08}{700} = 0.375\ ton.cm$$

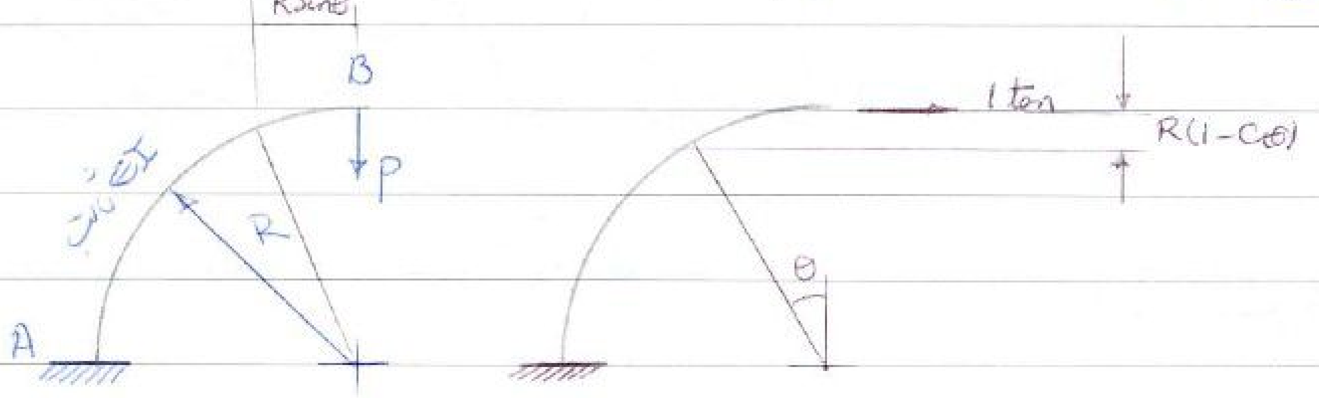
$$\int_0^l \frac{\bar{m}M\,dx}{EI} = \int_0^{200} \frac{(-2x)(-4x)\,dx}{EI} + \int_0^{400} \frac{(-x)(-2x)\,dx}{EI} = 1.525\ ton.m$$

$$1 \times \Delta = 0.375 + 1.525 = 1.9\ cm$$

۷) سازه با اعضای منحنی:

در سازه با اعضای منحنی شکل همانطور که گفته شد، حد بالای انتگرال باید به اندازه طول قوس در نظر گرفته شود. به همین ترتیب در سازه‌ها اعضای قوسی (منحنی) باید در محاسبات انتگرال به جای جزء طول dx باید از جزء طول ds استفاده شود. بدین ترتیب تمام انتگرال‌گیری‌هایی که موجود در روابط انرژی و کار مجازی معتبر می‌باشد، با این تفاوت که به جای dx باید از ds استفاده شود.

مثال: در طاق ربع دایره شکل داده شده تغییر مکان افقی نقطه B را بدست آورید.



$1 \times \vec{\Delta}_B = \int_0^S \bar{m} \frac{M}{EI} ds$

در شکل دایره بهتر است از مختصات قطبی استفاده شود.

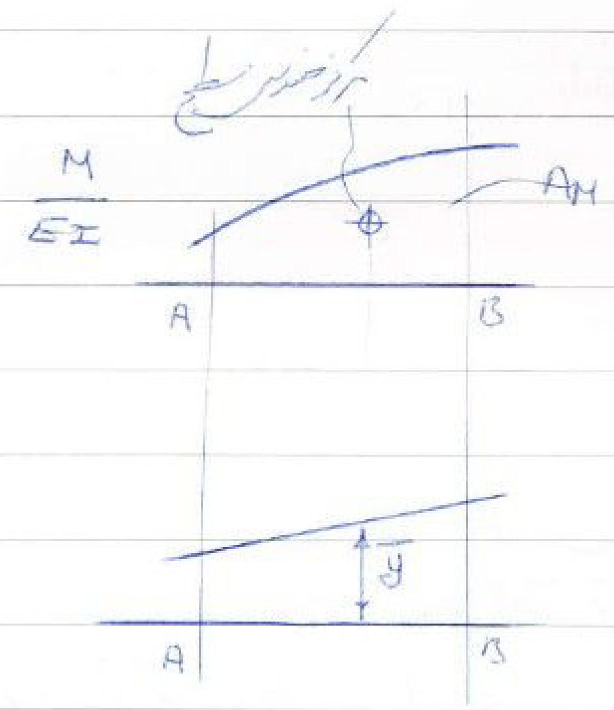
$ds = R d\theta$ $\qquad m = -R(1-C\theta)$ $\qquad M = -PR\sin\theta$

$$1 \times \Delta = \int_0^L \bar{m} \frac{M ds}{EI} \Rightarrow \Delta = \int_0^{\pi/2} -R(1-C\theta) \frac{-PR\sin\theta}{EI} R d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

حل عددی: $\int \bar{m} \frac{M}{EI} dx$

در حالت کلی که تا به حال دنبال کردیم سعی بر این بود که انتگرال فوق بصورت تحلیلی حل شود. به جای این کار می توان اقدام به رسم نمودارهای M و $\bar{m}$ نمود و انتگرال را به کمک این نمودارها حل نمود. دو روش در این میان متداول است.

۱) روش مور:



$$\int_A^B \bar{m} \frac{M}{EI} dx = A_M \cdot \bar{y}$$

$\bar{y}$: مقدار $\bar{m}$ در زیر مرکز هندسی سطح $\frac{M}{EI}$

در فاصله AB توابع $\bar{m}$، M و I باید پیوسته و یکنواخت باشند.

$$\int \bar{m}\frac{M}{EI}dx = \frac{h}{6EI}\left[A_0+4A_M+A\right]$$

۲) روش ذوزنقه :

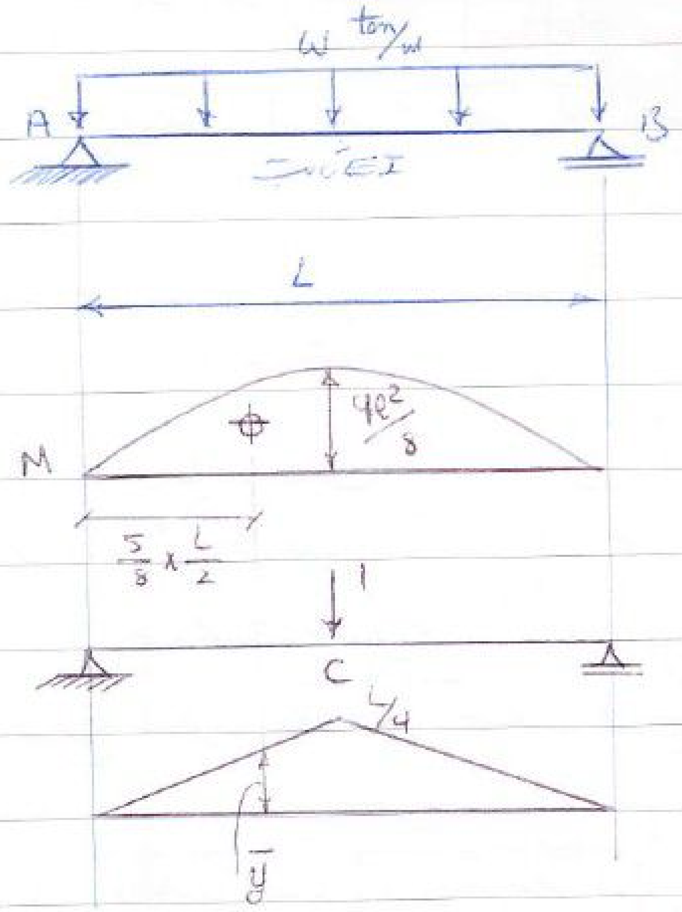
A_0 : حاصلضرب $\bar{m}.M$ در ابتدای قطعه

A_M : " " " " وسط "

A : " " " " انتهای "

h : طول قطعه

در طول h باید I ثابت باشد و $\bar{m}$ و M پیوسته و یکنواخت باشند.



$$1\times\Delta_C = \int_A^B \bar{m}\frac{M}{EI}dx = 2\int_A^C \bar{m}\frac{M}{EI}dx$$

روش جدول :

$$\bar{y} = 5/8 \times L/4 = 5/32\, L$$

$$A_M = \frac{2}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{wl^2}{8EI}\right]$$

$$\Delta_C = 2\times 5/32\, L \times \frac{wl^3}{24EI} = \frac{5}{384}\frac{wl^4}{EI}$$

روش ذوزنقه :

$A_0 = 0$ $\quad A_M = \frac{L}{8}\times\frac{3}{32}wL^2$ $\quad A = \frac{L}{4}\times\frac{wL^2}{8}$

$$\Delta_C^{\downarrow} = 2\left(\frac{L}{6\times 2}\right)\frac{1}{EI}\left(0+4\times\frac{L}{8}\times 3/3\, wL^2+\frac{wL^2}{8}\times\frac{L}{4}\right) = \frac{5}{384}\frac{wl^4}{EI}\downarrow$$

حمید کاظم

فصل ششم

تحلیل سازه‌های نامعین

سازه‌های نامعین دسته بزرگی از سازه‌ها را تشکیل می‌دهند که با توجه به خصوصیات مثبت آن‌ها مورد توجه مهندسین نیز می‌باشند. تحلیل سازه‌های نامعین با استفاده از معادلات تعادل استاتیک و شرایط تعادل آن‌ها تمام نمی‌باشد و تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات می‌باشد. برای آن‌ها باید معادلات کمکی در نظر گرفت. بر حسب چگونگی انتخاب مجهولات و معادلات کمکی دو فلسفه عمومی برای تحلیل سازه‌های نامعین وجود دارد.

۱) روش نیرو (نرمی) Force Method , Flexibility Method ،

در این روش مجهولات واکنش‌های تکیه‌گاهی یا نیروهای داخلی در نظر گرفته می‌شوند. معادلات اضافی نیز از معادلات سازگاری تغییر شکل‌ها در نظر گرفته می‌شوند. تکیه ما در این فصل بیشتر خواهد شد همین روش می‌باشد.

۲) روش تغییر مکان (روش سختی) Displacement Method ، Stiffness Method ،

در این روش مجهولات تغییر مکان‌ها و دوران‌های تکیه‌گاهی در نظر گرفته می‌شود و معادلات اضافی شامل معادلات تعادل می‌باشند. اساس این روش معادلات شیب افت می‌باشد که موضوع درس تحلیل ۲ است. در کنار این روش توزیع لنگر کراس، روش تکرار کانی، روش‌های عددی برای حل معادلات شیب افت هستند. زیاد هم در تحلیل ماتریسی سازه‌ها هر دو این دو فلسفه مورد استفاده قرار می‌گیرند. ولی برتری در تحلیل ماتریسی روش سختی است.

روش نیرو — روش سازگاری تغییر شکل‌ها — روش نرمی

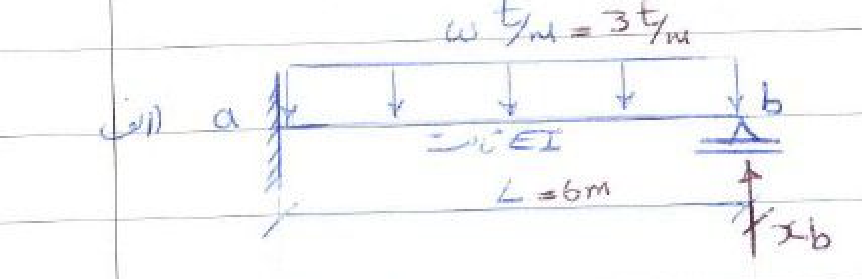
برنامه درسی ما برای تحلیل سازه‌های نامعین استفاده از روش نیرو یا سازگاری تغییر شکل‌هاست. در این روش ابتدا درجه نامعینی سازه باید تشخیص داده شود. اگر در این امر مشکلی بوجود آید، در نتیجه حل مسئله‌ای بی‌فایده خواهد بود.
به تعداد درجات نامعینی باید معادلات سازگاری تغییر شکل‌ها را نوشت تا سازه قابل تحلیل باشد. طی فصل‌های بعد این روش کار ارائه می‌گردد. در تحلیل سازه‌های نامعین به پایداری‌شان باید توجه داشت.

۱) برای تحلیل سازه‌های نامعین از خواص الاستیک اعضا مثل مدول الاستیسیته E و خواص هندسی مقطع مثل A و I استفاده می‌گردد. بنابراین این قدم در نتیجه ماهیت ندارند.

۲) تحلیل در محدوده‌ی الاستیک خطی است. یعنی رابطه‌ی بین σ و E نسبت خطی دارند ($\sigma = E\varepsilon$)

۳) سیستمی که سازه نامعین تحلیل می‌شود باید تحت عامل خارجی تغییر شکل کم داشته باشد.

مراحل تحلیل سازه نامعین به کمک سازگاری تغییر شکل‌ها:

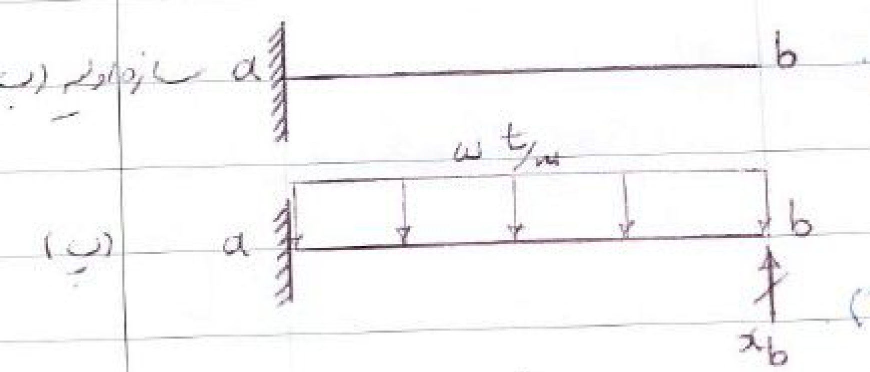


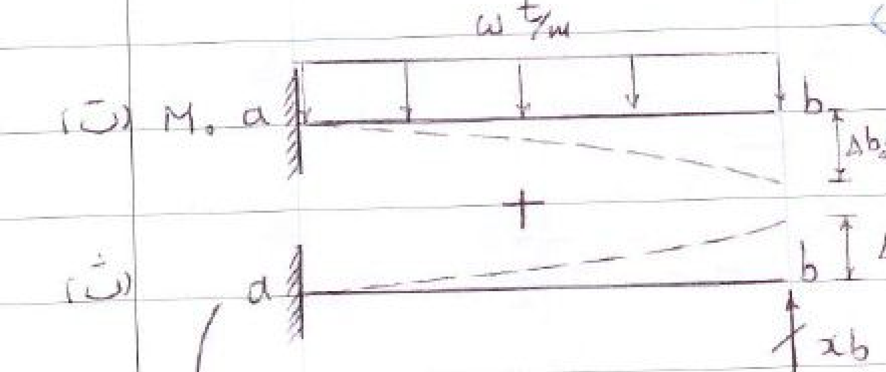
گام ۱: تعیین درجه نامعینی

در این مثال درجه نامعینی $n=1$ می‌باشد.

گام ۲: انتخاب مجهول اضافه

به تعداد درجات نامعینی می‌باید مجهول اضافه انتخاب کنیم. انتخاب مجهولات اضافی دلخواه است، ولی باید دقت نمائیم که سازه‌ای که پس از حذف مجهول اضافه باقی می‌ماند پایدار و معین باشد. (مجهول اضافه Redundent) در مثال مورد بحث واکنش تکیه‌گاهی نقطه B به عنوان مجهول اضافه انتخاب می‌گردد. البته انتخاب M_a نیز می‌تواند صحیح باشد ولی در هر حال در انتخاب مجهول اضافه سهولت کار نیز باید مورد توجه باشد.



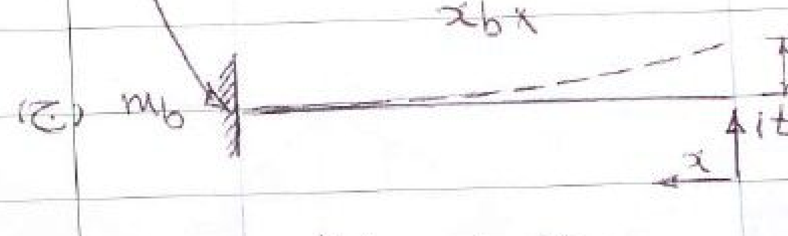


گام ۳: سازه اولیه (primary structure):

سازه‌ای که بعد از حذف مجهول اضافه و بارهای خارجی باقی می‌ماند به سازه اولیه معروف است. این سازه باید پایدار و معین باشد.

$$\Delta_b = \Delta_{b_0} + \Delta_{bb} = 0$$

$x_b \times$



گام ۴: اکنون سازه اولیه تحت بارهای خارجی و مجهول اضافه در نظر گرفته می‌شود. از این لحظه به بعد مجهول اضافی هم مانند یک بار خارجی محسوب می‌شود.

$$\Delta_{bb} = x_b\ \delta_{bb}$$

$$\Delta_{b_0} + x_b\ \delta_{bb} = 0$$

$$\rightarrow x_b = -\frac{\Delta_{b_0}}{\delta_{bb}}$$

گام ۵: اکنون سازه اولیه تحت بارهای خارجی و مجهول اضافه به دو سازه تجزیه می‌شود. سازه اول: سازه اولیه تحت

بارهای خارجی در سازه دوم به سازه اولیه تحت مجهول اضافی می باشد. ترکیب این دو سازه معادل سازه واقعی خواهد باشد که در یکی از آن ها مجهول x_b وجود دارد. برای تعیین مجهول x_b باید از یک شرط سازگاری استفاده نمود.

گام ۶ : نوشتن معادله سازگاری تغییر شکل :

دو سازه تجزیه شده دارای تغییر شکل های مشابهی می باشند. در سازه اول تغییر مکان قائم نقطه b (که جهت در امتداد مجهول اضافی است) با حرف Δb_0 نشان داده می شود که اندیس اول نشانه نقطه و اندیس دوم نشان دهنده حالت است. $(x_b = 0)$ و تغییر مکان قائم نقطه b در سازه دوم با Δbb نشان داده می شود که اندیس اول نشان دهنده نقطه و اندیس دوم نشان دهنده حالت است. برای اینکه مجموع این دو سازه برابر سازه اصلی باشد مجموع این دو تغییر مکان باید برابر صفر باشد. معادله نوشته شده معادله سازگاری تغییر مکان گویند. از این معادله حل شود x_b بدست می آید و برای اینکه این معادله ساده تر حل شود می توان یک تجزیه دیگر انجام داد.

گام ۷ : محاسبه تغییر مکان ها و مقدار مجهول اضافه قابل تعیین است. برای محاسبه تغییر مکان ها از هر روشی می توان استفاده نمود.

محاسبه Δb_0 : روش کار مجازی   ح = سازه مجازی   ت = سازه واقعی

$$1 \times \Delta b_0^{\uparrow} = \int \bar{m} \frac{M}{EI} dx = \int_0^6 m_b \frac{M_0}{EI} dx \qquad M_0 = -3\frac{x^2}{2} \;,\; m_b = x$$

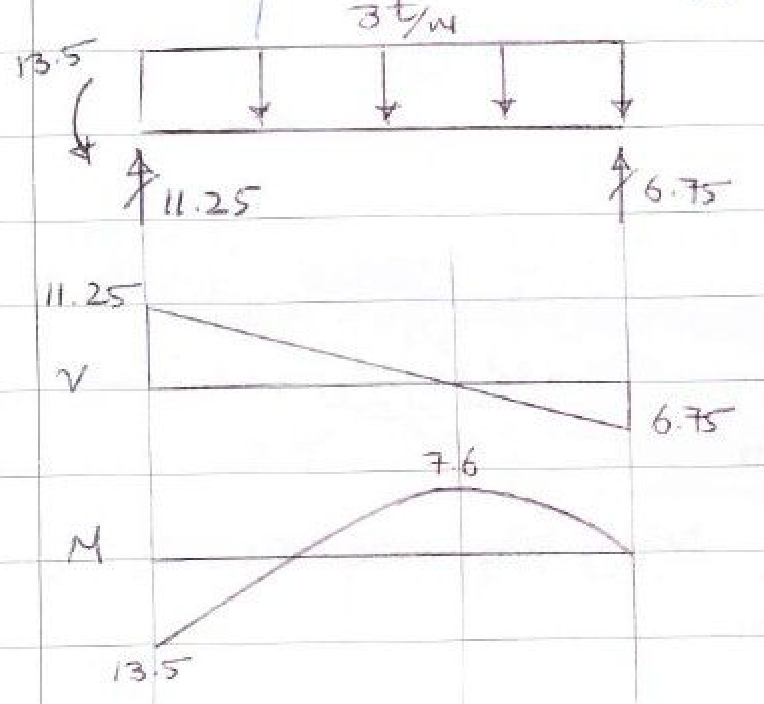
$$1 \times \Delta b_0 \uparrow = \int_0^6 (x)\left(-\frac{3x^2}{2}\right) dx = \frac{-486}{EI}$$

محاسبه δ_{bb} :   ح = سازه مجازی   ح = سازه واقعی

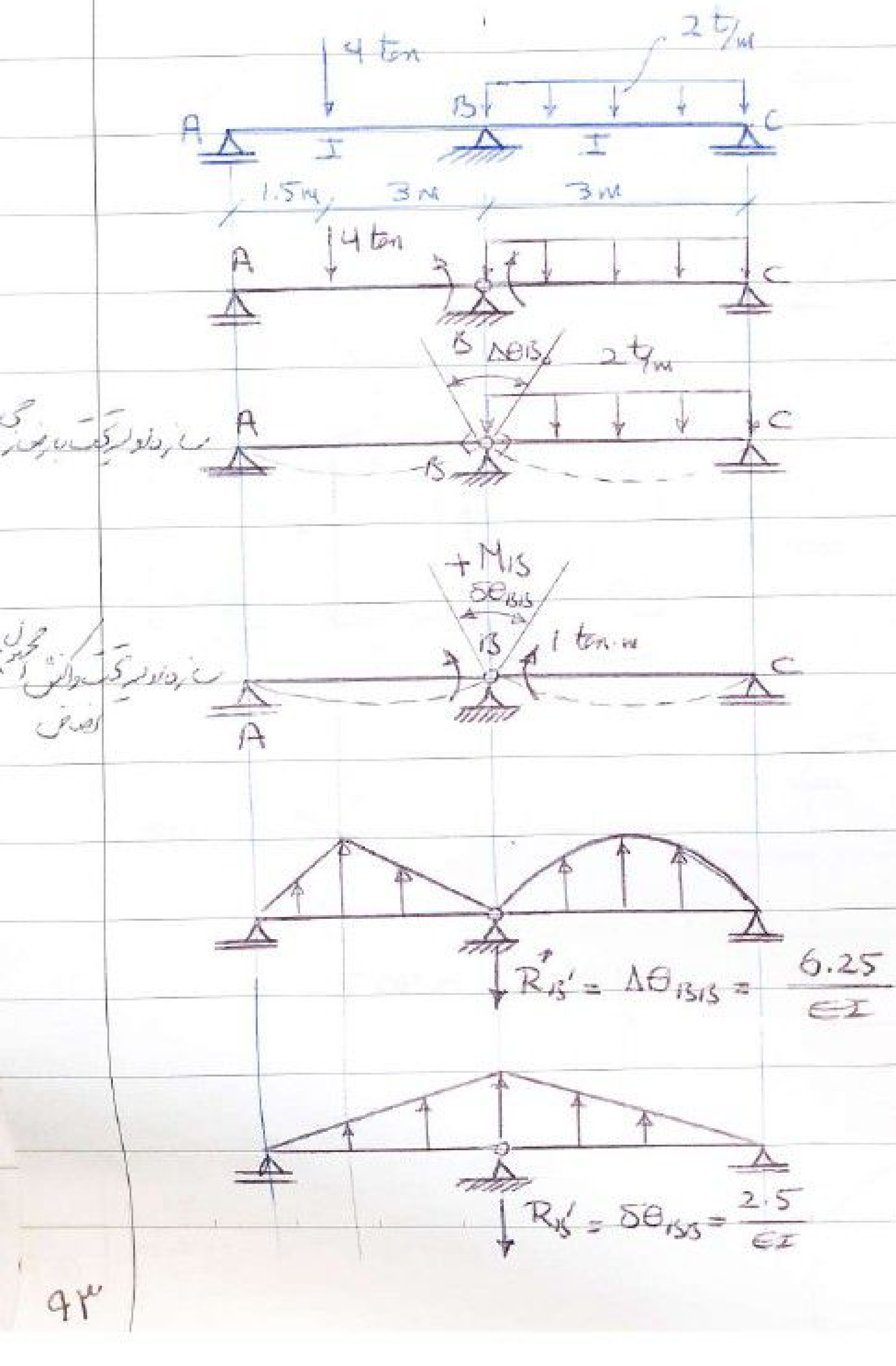
$$1 \times \delta_{bb}^{\uparrow} = \int_0^6 m_b \cdot \frac{m_b}{EI} dx = \int_0^6 x \frac{x}{EI} dx = \frac{72}{EI}$$

$$-\frac{486}{EI} + x_b \frac{72}{EI} = 0 \Rightarrow x_b = 6.75 \Rightarrow R_b = 6.75 \text{ ton}\uparrow$$

اگر R_b مثبت بدست آید بمعنی آن است که جهت واکنش در اعتقاد ما درست صحیح باشد.
پس از تعیین R_b سایر واکنش ها تعیین شده نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی رسم می گردد.



یکی از مزایای مثبت سازه نامعین کاهش نیروهای داخلی آن است. بعنوان مثال اگر این سازه فاقد نود واکنش R_b وجود نداشت ممان مثبت آن در نقطه a برابر 54 ton.m می شد که با مقدار بدست آمده قابل مقایسه نیست.

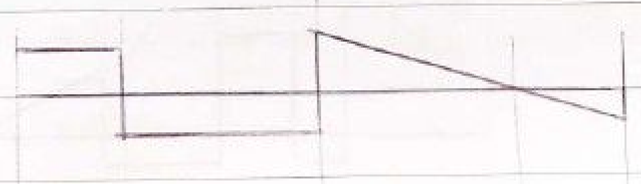


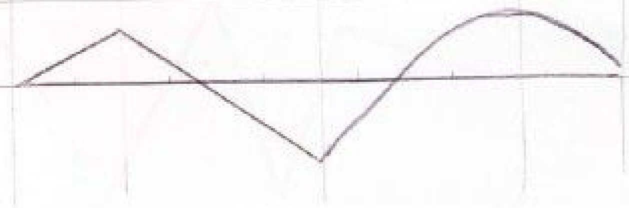
n=1 درجه نامعین

اگر M_B لنگر داخلی تیر در تکیه گاه B است. تجربه نشان داده در تیرهای سراسری انتخاب لنگر تکیه گاهی بعنوان مجهول اضافی باعث راحتی کار می شود.

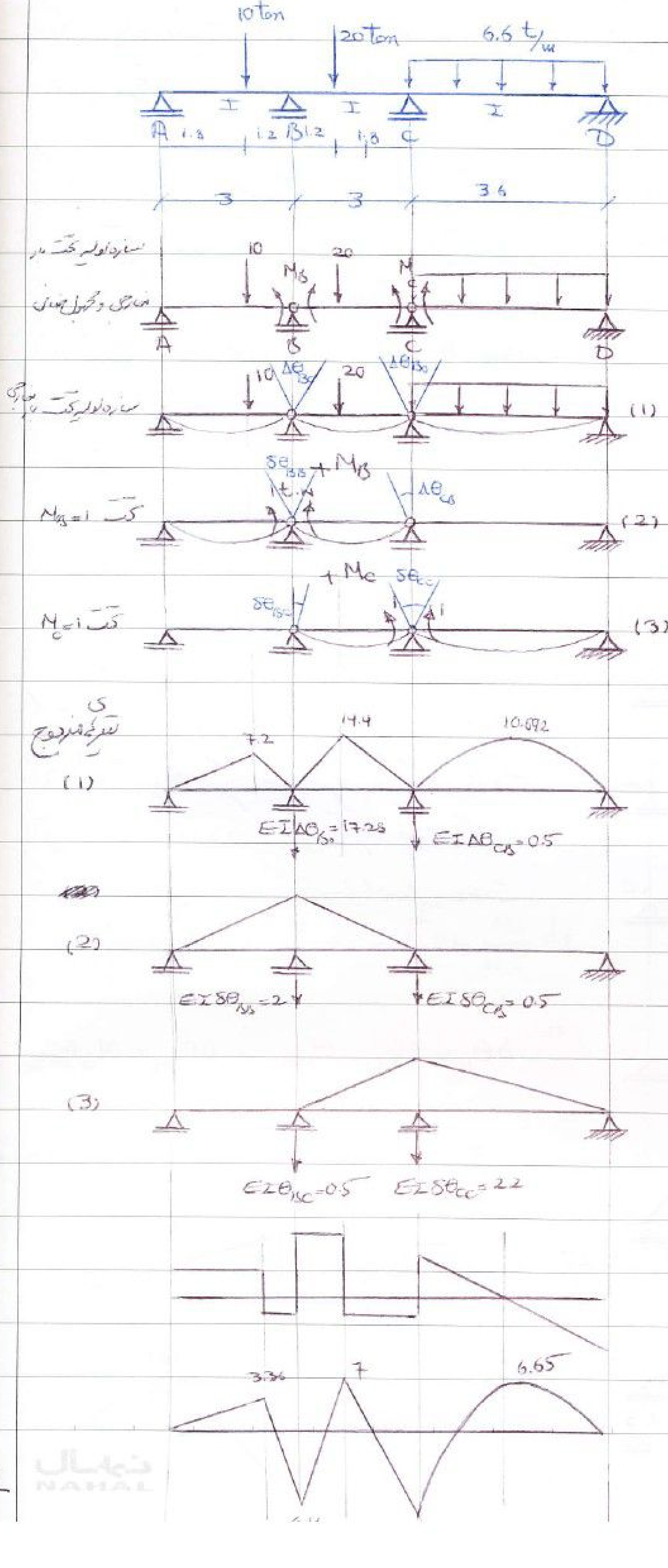
$$\Delta\Theta_B = \Theta_{BL} - \Theta_{BR} = \Delta\Theta_{B_0} + M_B\,\delta\Theta_{BB}$$

$$\frac{6.25}{EI} + M_B\,\frac{2.5}{EI} = 0 \rightarrow M_B = -2.5\ \text{ton.m}$$





تیر سراسری با دو درجه نامعینی :



در تجزیه سازه اولیه برای هر مجهول اضافی به طور جداگانه عمل می کنیم

معادلات سازگاری تغییر شکل ها :

$$\Delta\theta_B = \Delta\theta_{B0} + M_B\,\delta\theta_{BB} + M_C\,\delta\theta_{BC} = 0$$

$$\Delta\theta_C = \Delta\theta_{C0} + M_B\,\delta\theta_{CB} + M_C\,\delta\theta_{CC} = 0$$

$$\begin{cases} 17.28 + 2M_B + 0.5M_C = 0 \\ 22.91 + 0.5M_B + 2.2M_C = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 2.2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس نرمی}} \begin{bmatrix} M_B \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.28 \\ 22.91 \end{bmatrix}$$

ماتریس نرمی همیشه متقارن است

$$\begin{cases} M_B = -6.40 \text{ ton.m} \\ M_C = -8.96 \text{ ton.m} \end{cases}$$

تحلیل خرپاهای نامعین :

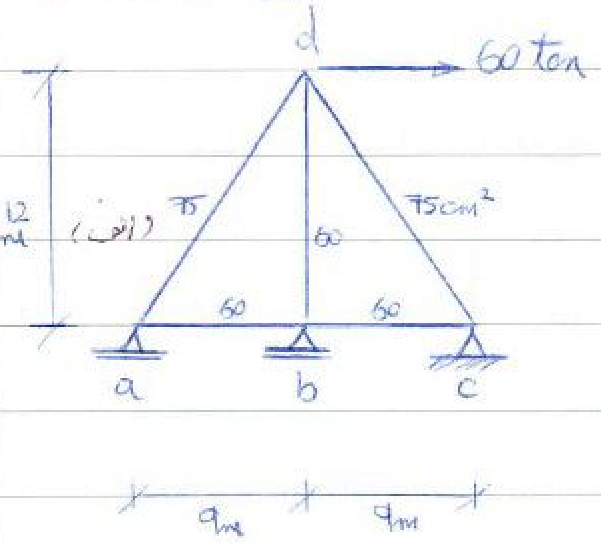
خرپا می‌تواند به یکی از ۳ حالت زیر نامعین باشد.

۱) نامعین خارجی : در این حالت مجهول اضافه یکی از واکنش‌های تکیه‌گاهی انتخاب می‌گردد.

۲) نامعین داخلی : وقتی است که نامعینی بعلت نیروهای داخلی اعضاء باشد. در این حالت مجهول اضافه نیروی داخلی عضو انتخاب می‌گردد.

۳) نامعین خارجی و داخلی : در این حالت نامعینی بعلت وجود تکیه‌گاه‌های اضافی و هم چنین اعضای اضافی می‌باشد و مجهول اضافه ترکیبی از واکنش‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی خواهد بود.

$E = 2\times10^{3}\ T/cm^2$

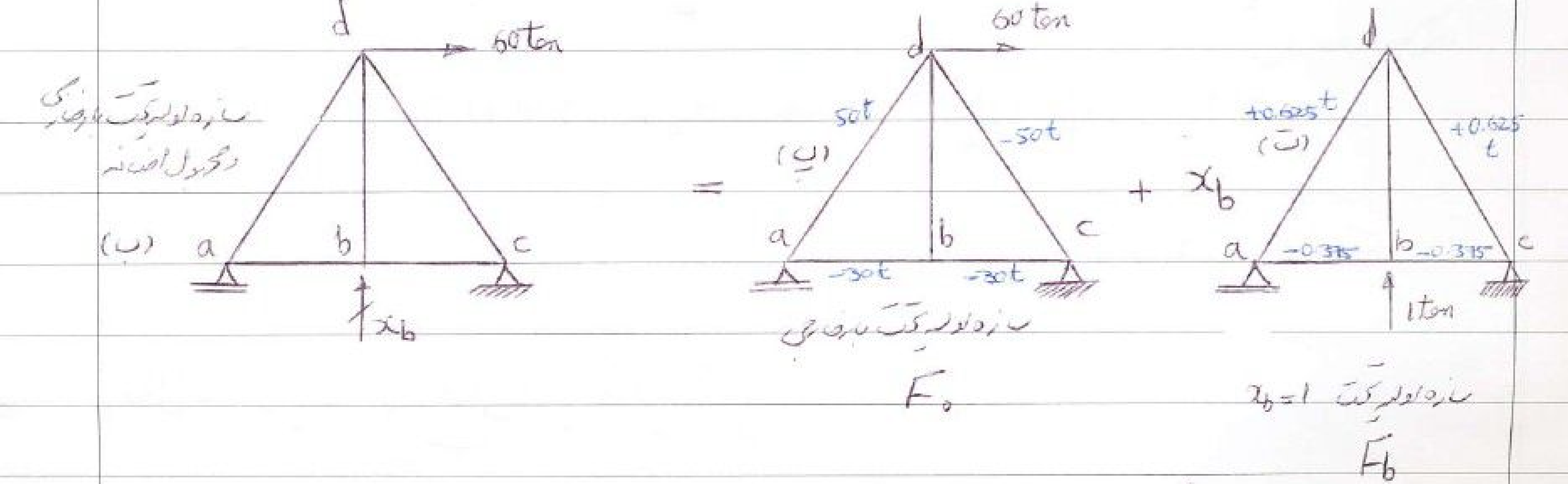


مثال ۱ : خرپای نامعین خارجی زیر را تحلیل کنید.

خرپای نشان داده شده یک درجه نامعین خارجی است. واکنش تکیه‌گاهی b بعنوان مجهول اضافه انتخاب می‌گردد.

معادلات سازگاری تغییر شکل :

$$\Delta_b^{\uparrow} = \Delta_{b_0}^{\uparrow} + x_b\,\delta_{bb}^{\uparrow} = 0$$



۱) محاسبه $\Delta_{b_0}^{\uparrow}$ (روش کار مجازی) :

ت : سازه مجازی

پ : سازه حقیقی

$$1\times\Delta_{b_0}^{\uparrow} = \sum F_b\,\frac{F_0 L}{EA} = \frac{1}{E}\sum F_b\,\frac{F_0 L}{A}$$

ت و سازه معین مکانیکی

۲) محاسبه δ_{bb} (کار مجازی):

$$1 \times \delta_{bb} = \sum \frac{F_b^2 L}{EA} = \frac{1}{E} \sum \frac{F_b^2 L}{A}$$

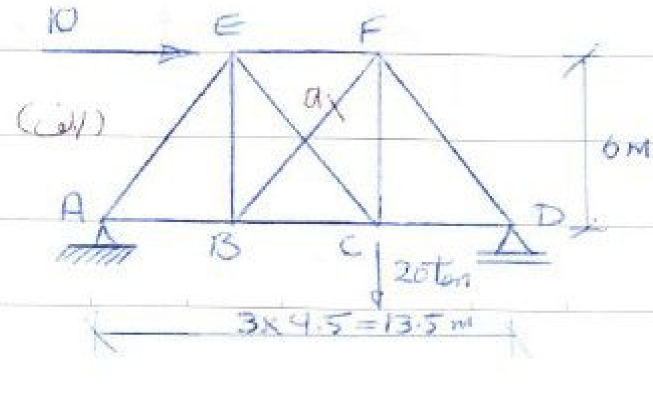
$F = F_0 + x_b F_b$ ton	$F_b^2 L/A$ ton^2/cm	$F_0 F_b L/A$ ton^2/cm	F_b ton	F_0 ton	$\frac{L}{A}$ $\frac{1}{cm}$	A cm^2	L cm	عضو واحد
−26.82	+2.11	+168.6	−0.375	−30	15	60	900	ab
−26.82	+2.11	+168.6	−0.375	−30	15	60	900	bc
+44.7	+7.81	+625	+0.625	+50	20	75	1500	ad
−55.3	+7.81	−625	+0.625	−50	20	75	1500	dc
+8.47	+20	0	−1	0	20	60	1200	bd
	+39.84	+337.2						

$$\Delta b_0 = \frac{337.2}{E} \qquad \delta_{bb} = \frac{39.84}{E}$$

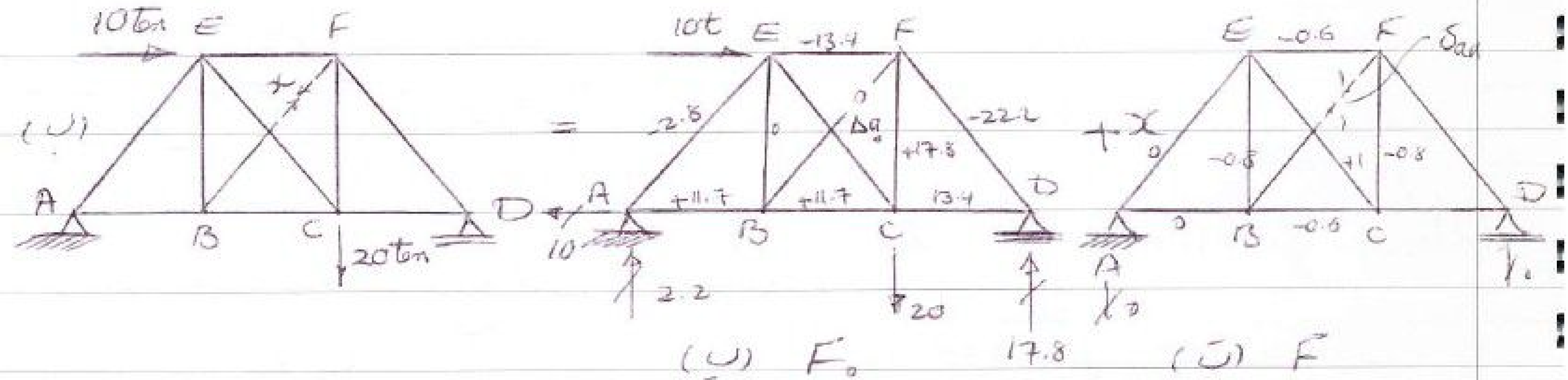
$$\Rightarrow \frac{337.2}{E} + x_b \frac{39.84}{E} = 0 \Rightarrow x_b = -8.47 \text{ ton}$$

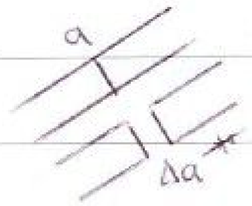
$$F = F_0 + x_b F_b$$

مثال ۲: خرپای با عضو داخلی زیر را تحلیل کنید.



خرپای نشان داده شده یک درجه نامعین داخلی است. نیروی داخلی عضو BF به عنوان مجهول اضافی انتخاب می شود. سازه پایه تحت بارهای خارجی و مجهول اضافه به صورت شکل نشان داده شده می باشد.





$$\Delta a^{*} = \Delta a_0 + x\,\delta_{aa} = 0$$

سازه واقعی (ت)

سازه مجازی (پ)

محاسبه Δa_0

(پ) مجازی (ت) واقعی

$$1 \times \Delta a_0^{*} = \frac{1}{E} \sum F_0 \frac{FL}{EA}$$

محاسبه δ_{aa}

(ت) ← مجازی , واقعی

$$1 \times \delta_{aa}^{*} = \frac{1}{E} \sum \frac{F^2 L}{EA}$$

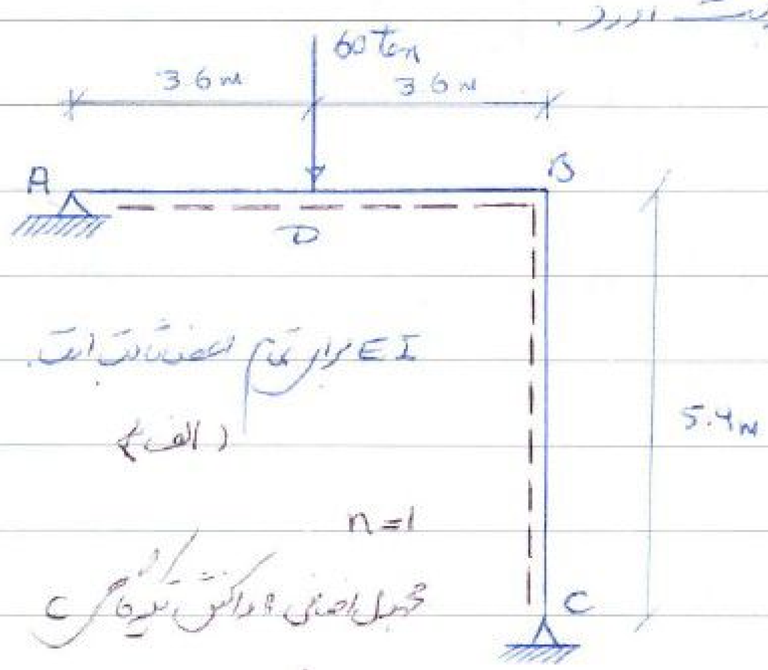
با توجه به جدول در کتاب

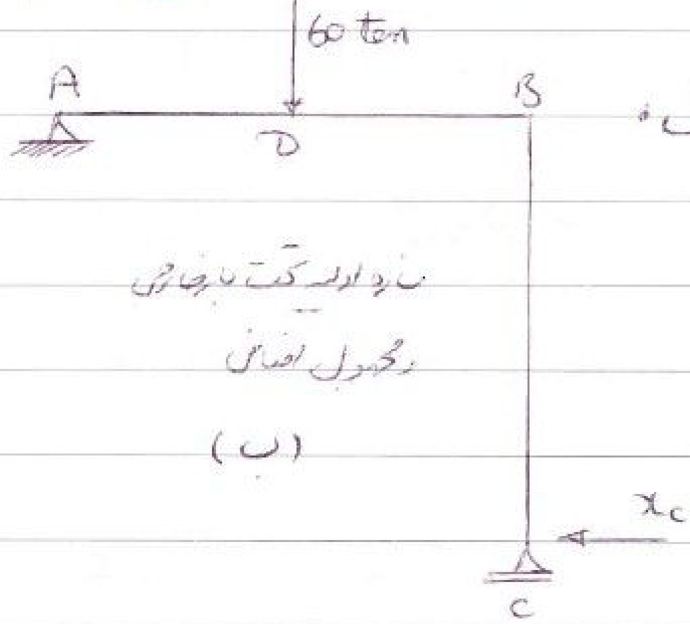
$$-\frac{119.7}{E} + x\,\frac{51.8}{E} = 0 \longrightarrow x = 2.3 \qquad F_{BF} = 2.3\ \text{ton}$$

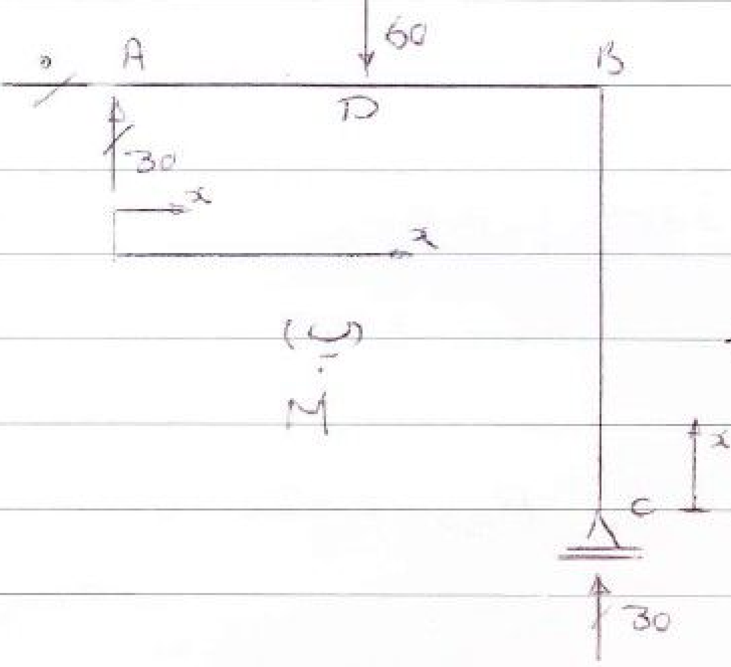
تحلیل قاب‌های نامعین:

قاب‌ها متشکل از اعضایی تحت تنش خمشی و نیروی برشی و بعضی از اعضای آن تحت نیروی محوری نیز قرار دارند. در اغلب اوقات می‌توان فقط با منظور کردن انرژی ناشی از تنش خمشی آنها را کفایت نموده و دقت مناسب نتایج لازم را بدست آورد.

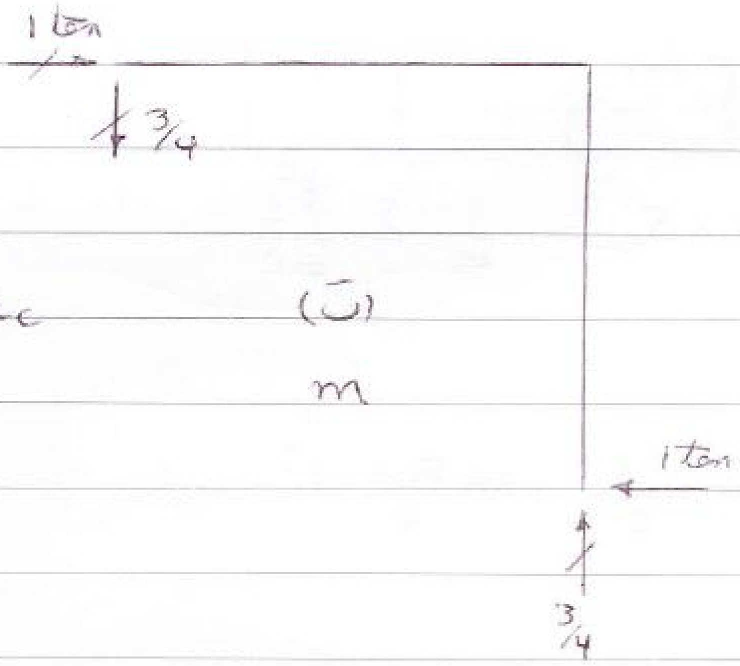
مثال:







$+ x_c$



$$\overleftarrow{\Delta}_C = \overleftarrow{\Delta}_{C0} + x_C \overleftarrow{\delta}_{CC} = 0$$

محاسبه $\overleftarrow{\Delta}_{C0}$:   حقیقی در پ   مجازی در ت

$$\Delta C_0 = \int m \frac{M}{EI} dx = \int_A^D + \int_D^B + \int_C^B$$

ناحیه AD : $0 < x < 3.6 \Rightarrow M = 30x \qquad m = -\frac{3}{4}x$

ناحیه DB : $3.6 < x < 7.2 \Rightarrow M = 30x - 60(x-3.6) \qquad m = -\frac{3}{4}x$

CB ناحیه : $0 < x < 5.4$ $\qquad M = 0 \qquad m = -x$

$$\Delta_{C_0} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{3.6} (30x)(-0.75x)\,dx + \int_{3.6}^{7.2} (-30x+216)(0.75x)\,dx + \int_0^{5.4} \cancel{(0)(-x)\,dx} \right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\left[-0.75x^3\right]_0^{3.6} + \left[7.5x^3 - 81x^2\right]_{3.6}^{7.2} \right) = -\frac{1050}{EI}$$

محاسبه δ_{CC} : بار مجازی در C

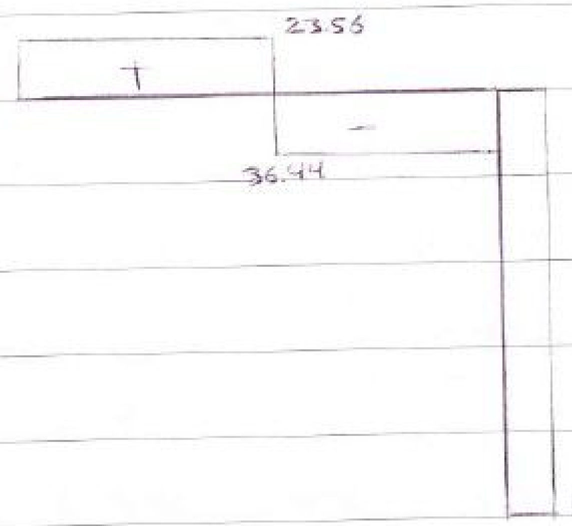
$$\delta_{CC} = \int \frac{m^2}{EI}\,dx = \int_A^B + \int_C^B$$

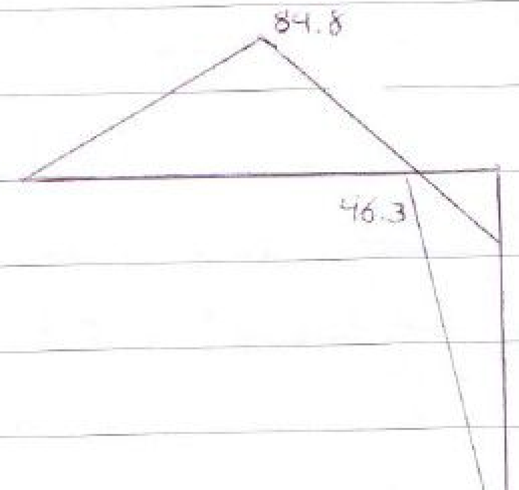
AB ناحیه : $0 < x < 7.2 \qquad m = \frac{-3}{4}x$

BC ناحیه : $0 < x < 5.4 \qquad m = -x$

$$\rightarrow \delta_{CC} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{3.6\times 2} (-0.75x)^2\,dx + \int_0^{5.4} (-x)^2\,dx \right) = \frac{122.5}{EI}$$

$$-\frac{1050}{EI} + \frac{122.5}{EI}\,x_C = 0 \rightarrow x_C = 8.58 \rightarrow R_{Cx} = 8.58\ \overleftarrow{ton}$$





اثر حرارت و نشست تکیه‌گاهی در سازه‌های نامعین

تأثیر حرارت و نشست تکیه‌گاهی را در فصل پنجم در سازه‌های معین مطالعه کردیم. ملاحظه شد که در سازه‌های معین، در اثر تغییرات دما و نشست تکیه‌گاهی فقط تغییر شکل ایجاد می‌شود و هیچگونه نیروی داخلی بوجود نمی‌آید. زیرا سازه معین در مقابل تغییر شکل رها است. موضوع را می‌توانیم با بررسی یک تیر ساده زیر در زیر درک کنیم. ملاحظه می‌شود که تغییرات دما هیچ تأثیری بر نیروهای داخلی ندارد.

گرادیان دما (اختلاف دما)

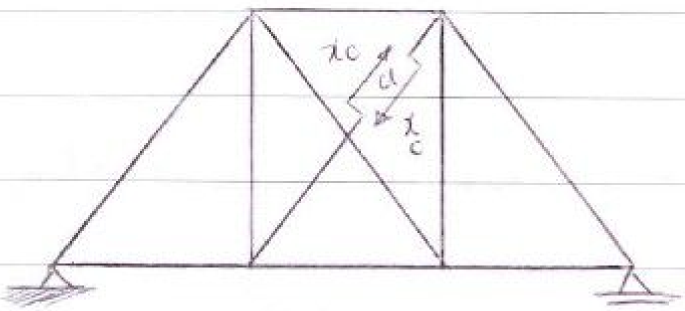
$T_2 > T_1$

اما در سازه‌های نامعین شرایط متفاوت است. قیدهای اضافی که به طور ذاتی در سازه‌های نامعین وجود دارد در اثر تغییرات دما و نشست تکیه‌گاهی، سازه را قادر به تغییر شکل مطلق نموده است. در این انطباق با شرایط تغییر شکلی، تکان نیرو نیروی داخلی ایجاد می‌گردد. موضوع را می‌توان با همان مثال تیر ساده که اکنون نامعین شده تحقیق نمود.

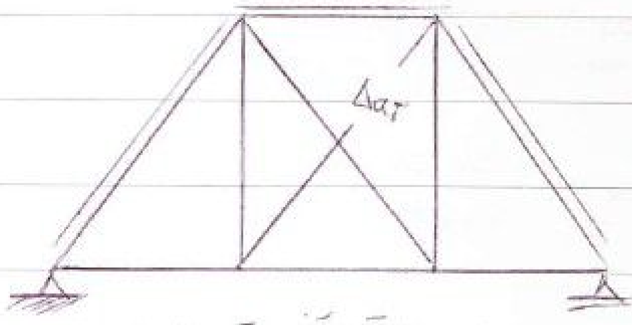
در این قسمت با استفاده از اصل جمع آثار قوا تحلیل سازه‌های نامعین در اثر تغییرات دما و هم چنین نشست تکیه‌گاهی مورد توجه قرار می‌گیرد.

مثال: مطلوبست محاسبه نیروهای داخلی بوجود آمده در اعضای خرپای زیر تحت افزایش دما به میزان $33^{\circ}C$ در اعضای aB، BC، cd. $\alpha_T = \frac{1}{84000} = 12\times10^{6}$

$E = 2\times10^{6}\ kg/cm^2$ است. سطح مقطع کلیه اعضا $65\ cm^2$ است.



(ب) سازه اولیه



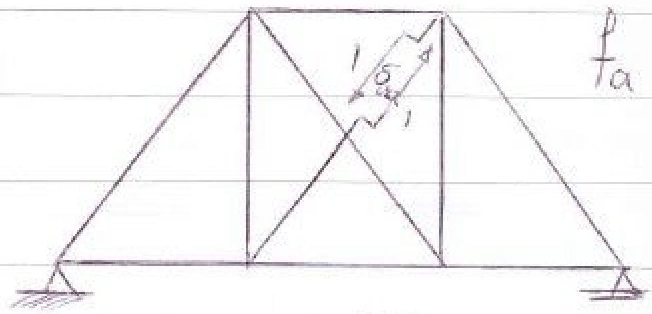
(پ) سازه اولیه تحت تغییرات دما

$n=1$ و نیروی عضو bC به عنوان مجهول اضافی

+

x_c

$$\Delta_a^* = \Delta_{aT}^* + x_c\,\delta_{aa}^* = 0$$



f_a

(ت)

محاسبه Δ_{aT} : (حقیقی پ و مجازی ت)

$$1 \times \Delta_{aT}^* = \Sigma f_a \cdot \Delta L$$

$$\Delta L = \alpha_t L (\Delta T)$$

$$1 \times \Delta_{aT} = \alpha_t \Sigma f_a (\Delta T) L$$

محاسبه δ_{aa}^* (حقیقی و مجازی ت) :

$$1 \times \delta_{aa}^* = \frac{1}{E} \Sigma \frac{f_a^2 L}{A}$$

عضو ردیف	L/A $1/cm$	f_a ton	$f_a^2 \frac{L}{A}$	ΔT c°	$f_a \Delta T L$ ton.c°.cm	$F = F_0 + x_a f_a$ ton
BC	6.92	-0.6	2.49	33	-8910	-3.18
bc	6.92	-0.6	2.49	0	0	-3.18
Bb	9.23	0.8	5.91	0	0	-4.24
Cc	9.23	0.8	5.91	0	0	-4.24
Bc	11.54	1	11.54	0	0	5.3
bC	11.54	1	11.54	0	0	5.3
Σ			39.88		-8910	

f_a اعضاء صفر نوشته نشده اند.

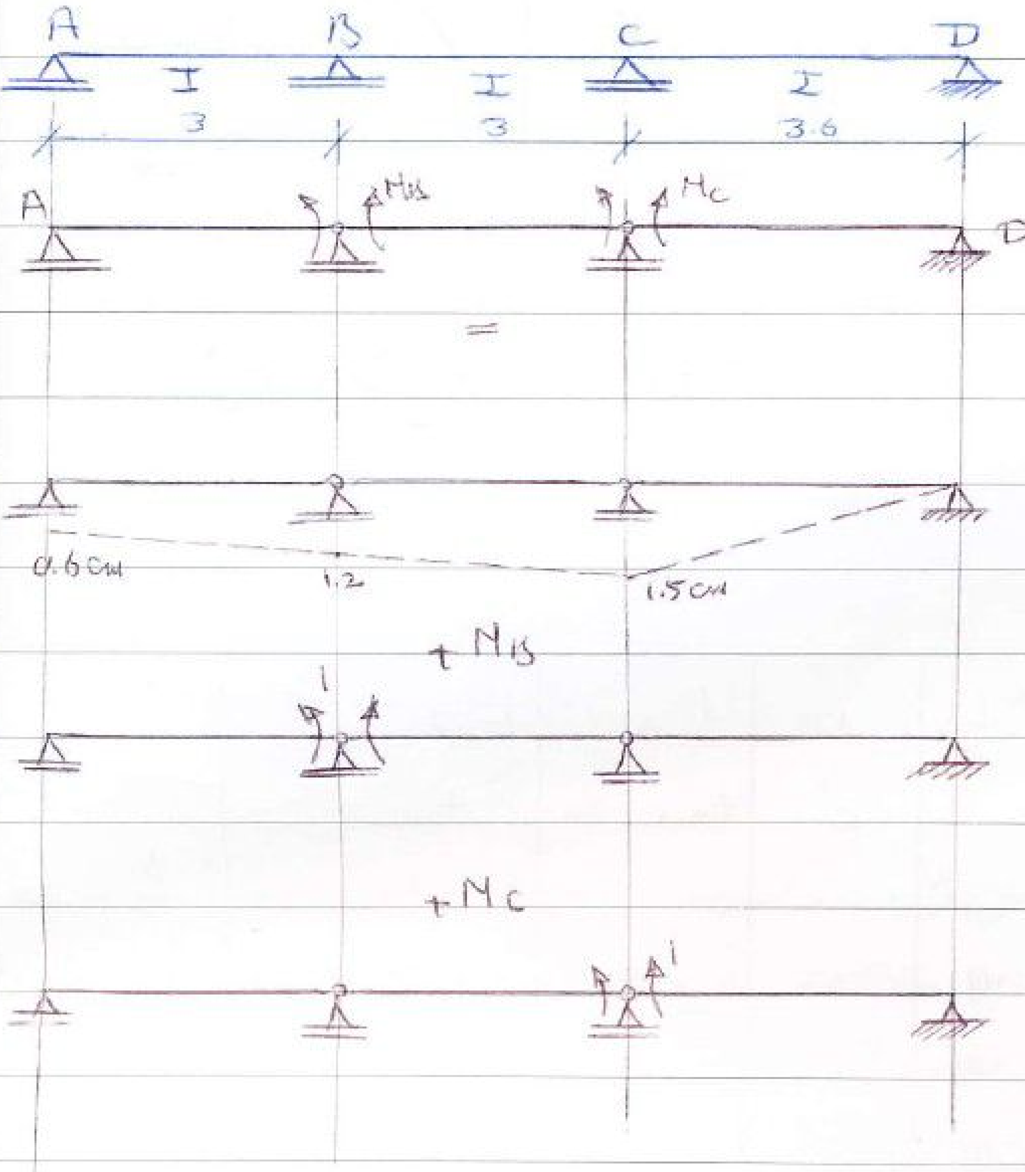
$$\Delta^{*}_{aT} = -8910\left(\frac{1}{84000}\right) = -0.106\ \text{cm}$$

$$\delta_{aa} = \frac{39.88}{2\times10^{3}} = 0.02 \quad \rightarrow \quad -1.06 + 0.02x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5.3\ \text{ton}$$

سازه نامعین تحت نشست تکیه‌گاهی

مثال: $A = 0.6\,\text{cm}\downarrow$ ، $B = 1.2\,\text{cm}\downarrow$ ، $C = 1.5\,\text{cm}\downarrow$ ، $D = 0$

نیروهای داخلی را بعلت نشست تکیه‌گاهی بدست آورید



$$\Delta\theta_B = \Delta\theta_{BS} + M_B\,\delta\theta_{BB} + M_C\,\delta\theta_{BC} = 0$$

$$\Delta\theta_C = \Delta\theta_{CS} + M_B\,\delta\theta_{CB} + M_C\,\delta\theta_{CC} = 0$$

$$\theta_{AB} = -\frac{1.2-0.6}{300} = -0.002$$

$$\theta_{BC} = (-1)\frac{1.5-1.2}{300} = -0.001$$

$$\theta_{CD} = \frac{1.5}{300} = 0.004167$$

$$\Delta\theta_{BS} = \theta_{BL} - \theta_{BR} = -0.001$$

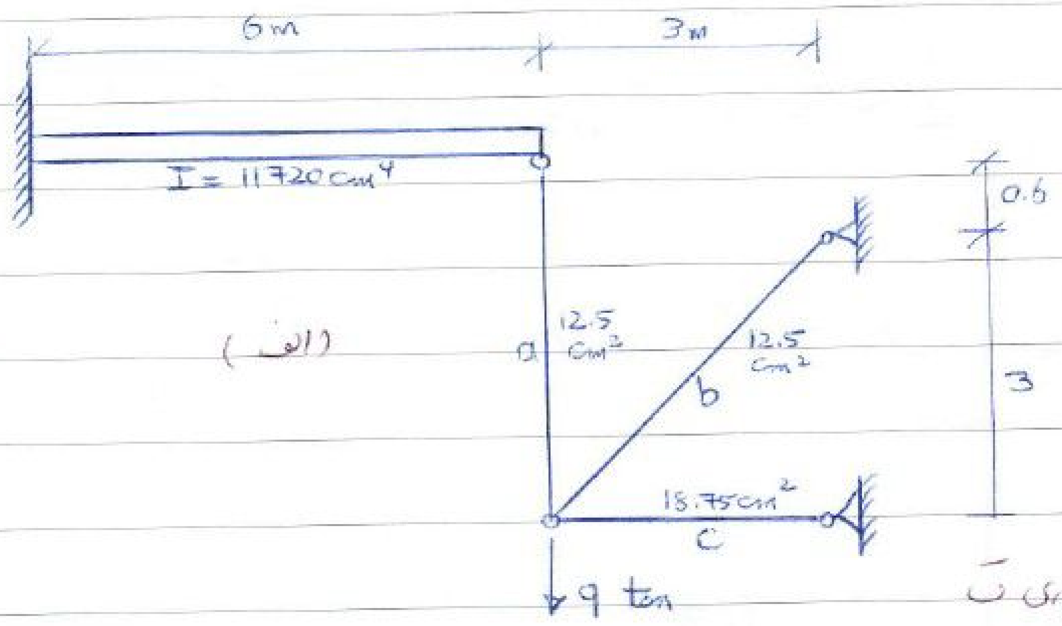
$$\Delta\theta_{CS} = \theta_{CL} - \theta_{CR} = -0.005167$$

$$\begin{cases} -0.001 + \dfrac{2}{EI}M_B + \dfrac{0.5}{EI}M_C = 0 \\ -0.005167 + \dfrac{0.5}{EI}M_B + \dfrac{2.2}{EI}M_C = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} M_B &= -0.000092\,EI \\ M_C &= +0.00237\,EI \end{aligned}$$

سازه‌های ترکیبی نامعین :

در سازه‌های ترکیبی نامعین همواره باید اثر نیروی محوری و خمش در نظر گرفته شود.

مثال :



(الف)

$D = 1$

نیروی عضو a بعنوان مجهول اضافی

$$\Delta a = \Delta a_0 + T_a \delta_{aa} = 0$$

Δa_0 : واقع در شکل پ می‌باشد

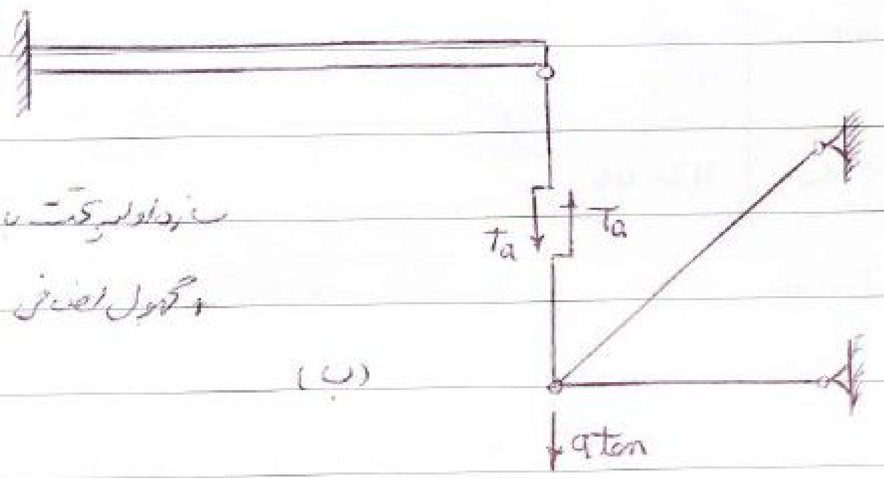
$$E\Delta a_0 = \int m_a \frac{M_0}{I} dx + \Sigma f_a \frac{F_0}{A} L$$

δ_{aa} : واقع در شکل ت می‌باشد

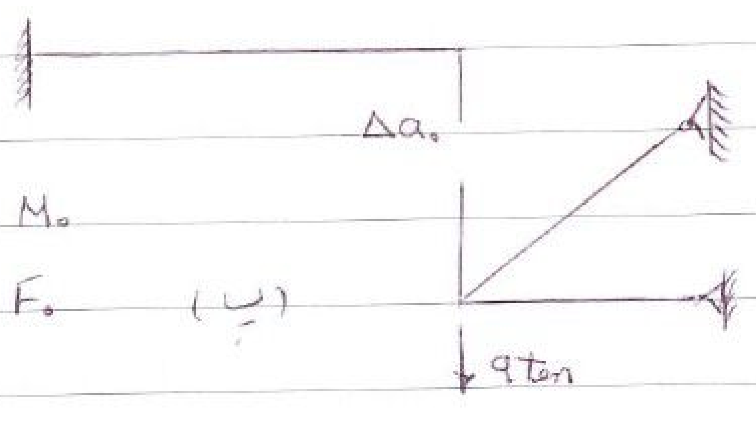
$$E\delta_{aa} = \int \frac{m_a^2}{I} dx + \Sigma \frac{f_a^2}{A} L$$

واحد نیرو تن و طول cm

سازه اولیه تحت بار خارجی + مجهول اضافی

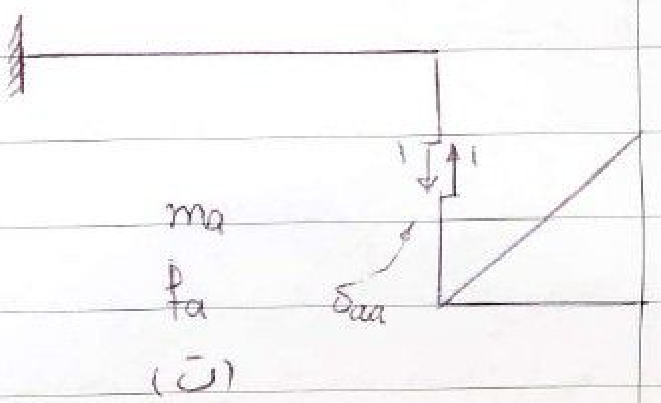


(ب)



(پ)

$+ T_a$



(ت)

محاسبه مقادیر انتگرال :

$M_0 = 0 \qquad m_a = -x$

$$\int \frac{M_0}{I} dx = 0$$

$$\int_0^{600} \frac{m_a^2}{I} dx = \int_0^{600} \frac{x^2}{I} dx = \frac{1}{I} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{600} = \frac{1}{11720} \times \frac{600^3}{3} = 6143.34$$

عضو واحد	L/A	F_0	f_a	$f_a F_0 \frac{L}{A}$	$f_a^2 L/A$
a	28.8	0	1	0	28.8
b	33.94	12.73	-1.414	-610.93	67.86
c	16	-9	1	-144	16
				-754.93	112.66

$$-754.93 + (6143.34 + 112.60) T_a = 0$$

$$T_a = 0.12$$

$T_b = 12.73 - 1.414 \times 0.12 = 12.56\ ton \qquad T_e = -9 + 1 \times 0.12 = -8.88\ ton$

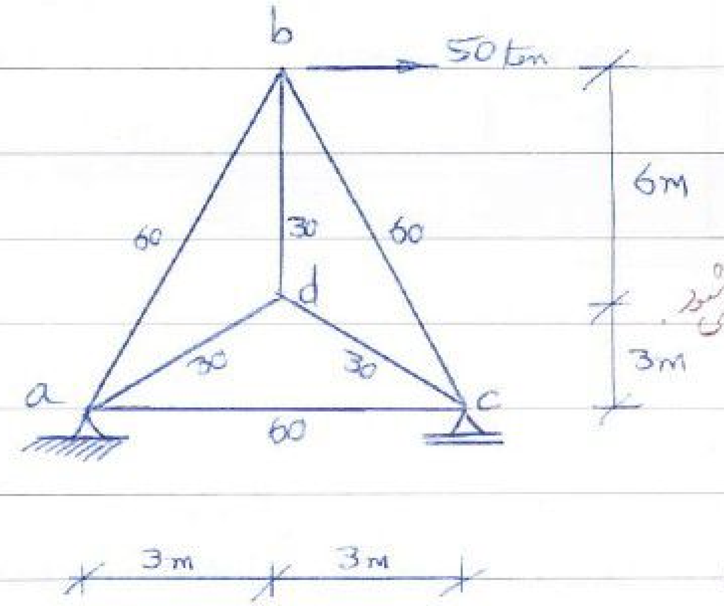
از نیروی خارجی 9t فقط 0.12 ton به تیر خمشی می‌رسد و باقیمانده توسط b گرفته می‌شود. در خصوص b
این موضوع یکی از مهمترین مشخصه‌های سازه‌های نامعین است. یعنی عضوی که سخت‌تر است نیروی بزرگتری از عضو
نرم‌تر سهم بزرگتری را می‌برد.

روش کار حداقل:

از قضیه تغییر شکل کاستیلیانو می توان به طور مستقیم برای تحلیل سازه های نامعین استفاده کرد. در این روش نیازی به معادلات سازگاری تغییر شکل ها نداریم. به همین علت ممکن است که نظر دانشجویان به دو تئوری اخیر این کتاب صد چندان جذابیت دارد.

۱) می توان سازه نامعین را تحت آثار حرارتی و نشست تکیه گاهی تحلیل نمود.

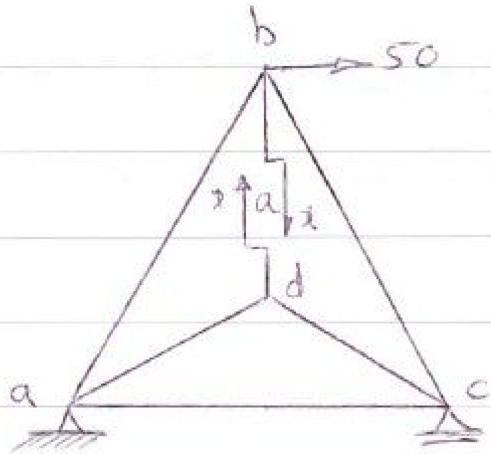
۲) محاسبه های بیشتری نیاز دارد و اگر بخواهیم به تکنیک های عددی متوسل شویم، دقیقاً همان روش سازگاری تغییر شکل ها خواهد شد.



مثال:

$n=1$ نیروی عضو bd به عنوان مجهول اضافه انتخاب می شود.

در این مرحله به جای روش روابط سازگاری تغییر شکل ها قضیه کاستیلیانو برای تعیین تغییر شکل مربوط به مجهول اضافه اعمال می کنیم که همان روابط سازگاری است.



$$\Delta_a^{\ddagger} = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

این شکل ظاهری معادله فوق همیشه قابل صدق است، بدین معنا که اگر انرژی را تغییر دهیم این یعنی انرژی ذخیره شده مقدار مجهول اضافه باید طوری باشد که به ازای آن تابع انرژی حداقل گردد. از این نقطه نظر به این روش کار حداقل گوییم.

$$U = \sum \frac{F^2 L}{2EA}$$

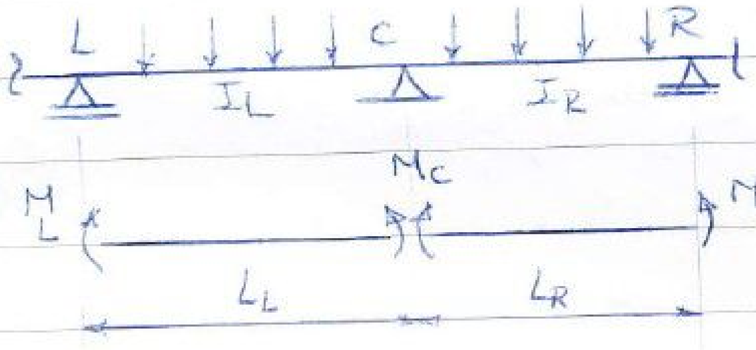
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{E} \sum \frac{FL}{A} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$F\frac{L}{A}\frac{\partial F}{\partial x}$ ton/cm	$\partial F/\partial x$ ton/cm	F ton	L/A 1/cm	عضو واحد
$-660+4.41x$	-0.529	$79-0.529x$	15.8	ab
$+660+4.41x$	-0.529	$-79-0.529x$	15.8	bc
$-83.3+1.11x$	-0.333	$25-0.333x$	10	ca
$7.05x$	$+0.707$	$+0.707x$	14.1	ad
$+20x$	$+1$	$+x$	20	bd
$+7.05x$	$+0.707$	$+0.707x$	14.1	cd
$-83.3+44.03x$				

$$\Rightarrow x = \frac{53.3}{44.03} = 1.89 \text{ ton}$$

رابطه ۳ لنگری

در قرن ۱۹ میلادی یک مهندس فرانسوی به نام کلاپیرون رابطه‌ای بین ۳ لنگر تکیه‌گاهی متوالی از یک تیر سراسری برقرار نمود و مدت‌ها این روش برای تحلیل تیرهای سراسری استفاده می‌شد. با ابداع روش توزیع لنگرها گرایش این روش منسوخ شد.



$$M_L\frac{L_L}{I_L} + 2M_c\left(\frac{L_L}{I_L}+\frac{L_R}{I_R}\right) + M_R\frac{L_R}{I_R} = -\frac{L_0}{I_L} - \frac{R_0}{I_R} + 6E\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_c\left(\frac{1}{L_L}+\frac{1}{L_R}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right]$$

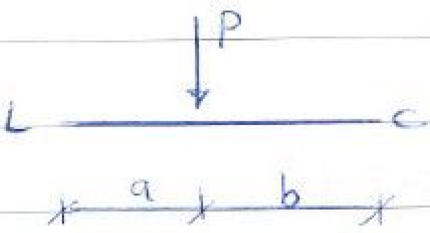
$+\uparrow$ نشست تکیه‌گاه چپ $= \delta_L$

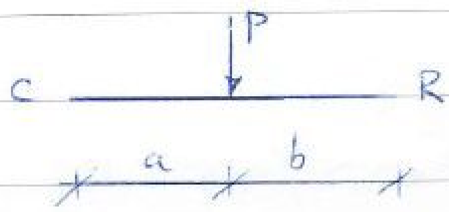
$+\uparrow$ نشست تکیه‌گاه وسط $= \delta_C$

$+\uparrow$ نشست تکیه‌گاه راست $= \delta_R$

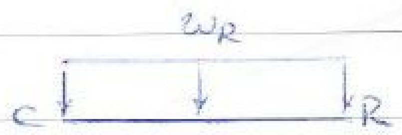
اگر یکی تکیه‌گاه‌ها هم جهت نشست کند (در اثر بیرون آبی) و گسترش می‌یابد

توابع بارگذاری L_0 و R_0 :



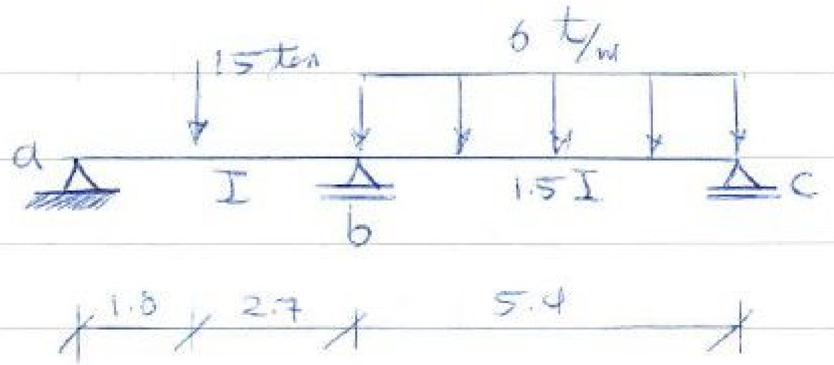


$$L_0 = \frac{Pab(2a+b)}{L_L} \qquad R_0 = \frac{Pab(a+2b)}{L_R}$$



$$L_0 = \frac{w_L L_L^3}{4} \qquad R_0 = \frac{w_R L_R^3}{4}$$

$$I_L = I_R \Rightarrow M_L L_L + 2M_C(L_L + L_R) + M_R L_R = -L_0 - R_0 + 6EI\left[\frac{\delta_L}{L_L} - \delta_C\left(\frac{1}{L_L} + \frac{1}{R_L}\right) + \frac{\delta_R}{L_R}\right]$$



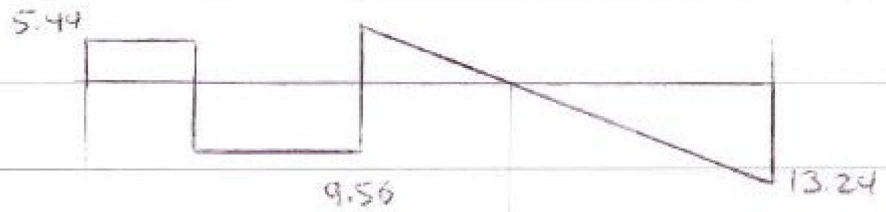
تیر سراسری مقابل ۱ درجه نامعین
است. به تعداد درجات نامعینی
معادله ۳ لنگری نوشت.
یعنی فقط یک بار نوشتن این رابطه
کفایت می‌کند

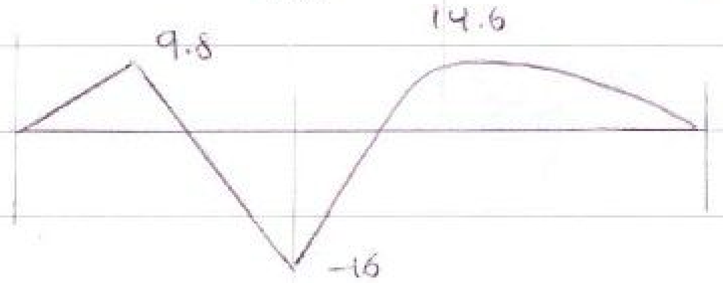
$M_a = 0 \qquad M_b = ? \qquad M_c = 0$

$\delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$

$L_0 = (15 \times 1.8 \times 2.7 \times 6.3)/4.5 = 102 \qquad R_0 = \dfrac{6(5.4)^3}{4} = 236$

$0 + 2M_0\left(\dfrac{4.5}{I} + \dfrac{4.5}{1.5I}\right) + 0 = -\dfrac{102}{I} - \dfrac{236}{1.5I} \rightarrow M_b = -16 \text{ ton.m}$

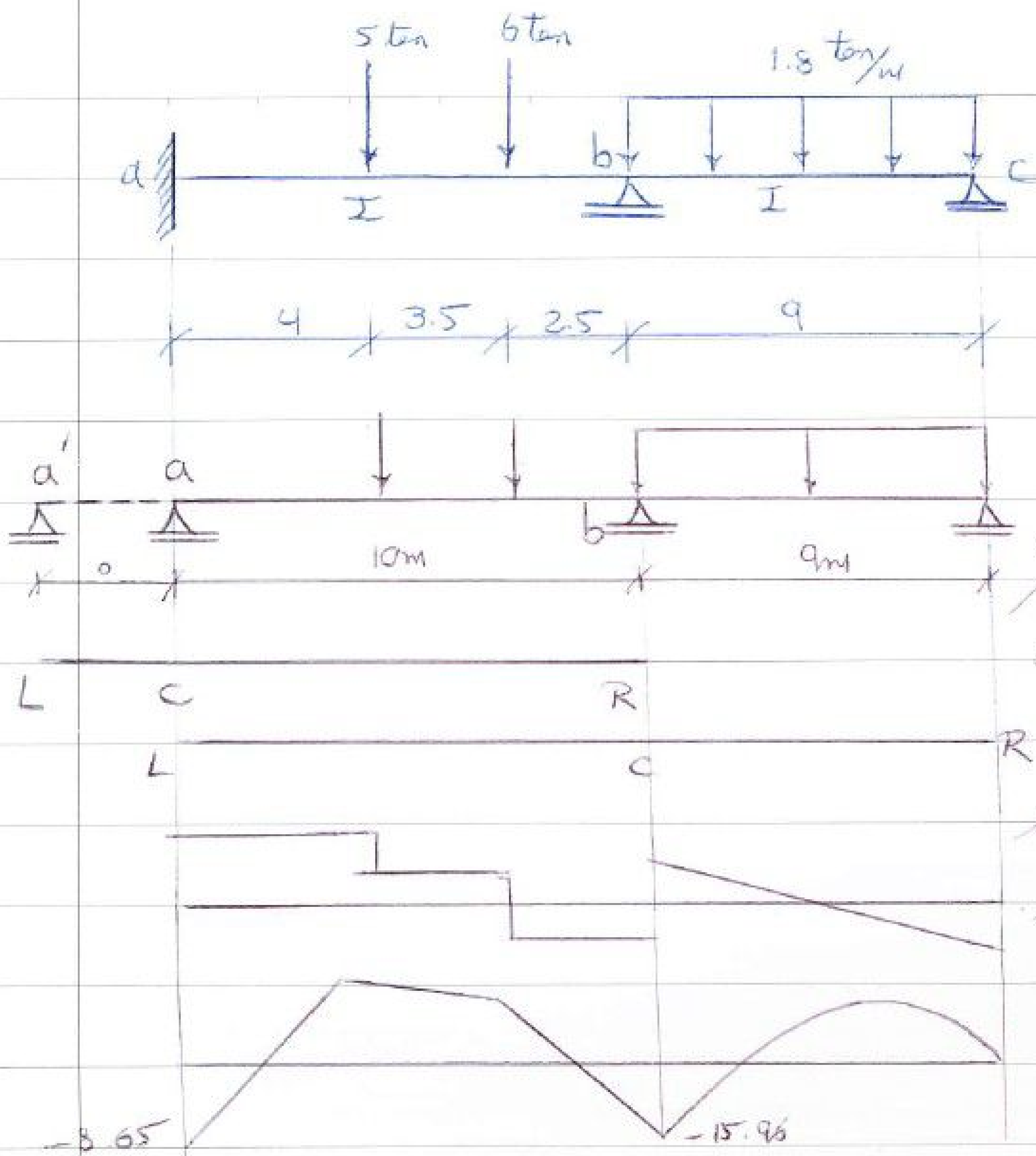




6.1 / 6.2 / 6.13 / 6.17 / 6.19

6.22 / 6.23 / 6.26 / 6.28 / 6.30 / 6.29 / 6.32 / 6.33 / 6.48 ← تمرین‌های فصل

سه لنگری ← 6.50 / 6.51 / 6.53 /



تیر سراسری نشان داده شده برای نیروهای قائم از نظر ایستایی دو درجه نامعین می‌باشد. با انتخاب m_a و m_b به عنوان مجهولات اضافه نیاز به دو رابطه یعنی دو بار نوشتن معادله سه لنگری داریم. تکنیک حل تیرهای سراسری با تکیه‌گاه انتهایی گیردار به این ترتیب است که تکیه‌گاه گیردار تبدیل به تکیه‌گاه ساده و دهانه‌ای به طول صفر به آن اضافه می‌شود تا تیر سراسری با تکیه‌گاه‌های ساده‌ای شود

$$\delta_{a'} = \delta_a = \delta_b = \delta_c = 0$$

(۱ a' a b

L C R

$$L_0 = 0 \qquad R_0 = \frac{5\times4\times6\times16}{10} + \frac{6\times7.5\times2.5\times12.5}{10} = 332.6$$

$$M_{a'} = 0 \qquad 20M_a + 10M_b = -332.6$$

(۲ a b c

L C R

$$L_0 = \frac{5\times4\times6\times14}{10} + \frac{6\times7.5\times2.5\times17.5}{10} = 364.9$$

$$R_0 = \frac{1.8\times9^3}{4} = 328$$

$$10M_a + 38M_b = -693 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} M_a = -8.65 \\ M_b = -15.96 \end{cases}$$