ریاضی کاربردی - ترم دوم - استاد قبادزاده - حسین بابایی

1

جمع برداری

$(1,2,5)+(-1,0,3)=(0,2,8)$

قرینه دار

$-(1,-2,4)=(-1,2,-4)$

بردار صفر

$(0,0,0)+(1,4,5)=(1,4,5)$

$(3,7,-5)+(-3,-7,5)=(0,0,0)$

تفاضل بردارها

$(3,2,5)-(1,0,4)=(2,2,1)$

ضرب نقطه‌ای

$(1,0,3)\cdot(-1,3,2)=-1+0+6=5$

توابع برداری

$f(x,y)=(2x-y,\ y^2)$

$f(0,1)=(2\times 0-1,\ 1^2)=(-1,1)$

$g(x,y)=(e^x,\ \sqrt{x-y})$

$g(0,1)=(1,\ \sqrt{0-1})=\sqrt{-1}$

دامنه: توابع چندجمله‌ای تمام اعداد حقیقی R

دامنه $\rightarrow R$ $2^x \leftarrow$ تابع نمایی

$$f(x) = (3x^2 - \sqrt{x} \;,\; e^x - 2)$$

$$f'(x) = \left(6x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \;,\; e^x\right)$$

$$\lim_{x=1} \left(\frac{x^2-1}{x-1} \;,\; \sqrt{x-1} \right) = \left(\lim_{x=1} \frac{x^2-1}{x-1} \;,\; \lim_{x=1} \sqrt{x-1} \right)$$

$$\lim \frac{x^2-1}{x-1} = \lim \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

(وجود ندارد ، ۲)

پیوستگی: برابر بودن حد با تابع را پیوستگی می‌گویند.

$$f(x) = (x^2 - 3x' \;,\; e^x - 7x + \sqrt{x})$$

$$\int f(x)\,dx = \left(\int x^2 - 3x + 1)\,dx \;,\; \int (e^x - 7x + \sqrt{x}\,dx\right)$$

$$= \frac{x^3}{3} - 3\,\frac{x^2}{2} + 1x \;,\; e^x - 7\,\frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f(x,y) = (x+y \;,\; x-y)$$

$$\lim_{(x,y) \Rightarrow (1,1)} f(x,y) = (2,0)$$

$$\lim_{(x,y) \Rightarrow (0,0)} (\sqrt{x-y} \;,\; x+2y)$$

$$\lim_{y \Rightarrow 0} \sqrt{-y}$$ وجود ندارد

مشتق های جزیی

$$f(x,y) = (x^2 - y \cdot \sqrt{x} + 2y - 3)$$

(y عدد ثابت) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(2x , \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

(x عدد ثابت) $$\frac{\partial f}{\partial y} = (-1 , 2)$$

تابع چند متغیره

$$f(x,y) = \sqrt{x}\, y - 2e^{x} + 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2e^{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x}$$

$$f(x,y) = 3xy^2 - \sqrt{x}\, e^{y} + (\sin x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 - e^{y} \frac{1}{2\sqrt{x}} + (3\cos x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - \sqrt{x}\, e^{y}$$

مشتق جهتی : بردار یکه

$$\vec{V} = (3,2)$$

اندازه بردار $$|\vec{V}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

اگر اندازه بردار برابر یک باشد به آن بردار یکه می گویند

$$\vec{i} = (1,0) \qquad |\vec{i}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{j} = (0,1) \qquad |\vec{j}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

فرض کنید $\vec{u}$ یک بردار یکه باشد. مشتق جهتی تابع f در جهت $\vec{u}$ طبق فرمول زیر محاسبه می‌شود. $D^f_{\vec{u}} = u \cdot \nabla f$ که در آن ∇f نماد گرادیان f است و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

مثال: مشتق جهتی تابع $f(x,y)=x^2y-3xy$ را در نقطه (0,1) و در جهت بردار $\vec{u}=(1,0)$ بدست آورید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{(0,1)} = 2y\cdot x - 3y = -3$$

$$\Longrightarrow \nabla f_{(0,1)} = (-3,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3x = 0$$

$$D^f_{\vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = (-3,0)\cdot(1,0) = \underbrace{-3\times 1}_{-3} + \underbrace{0\times 0}_{0} = -3$$

مثال: مشتق جهتی تابع $f(x,y)=e^{x+y}+2x^2y$ را در نقطه (1,1) را در جهت بردار (4,3) را محاسبه کنید.

$$\vec{V}=(4,3)$$

یکه کردن بردار $|\vec{V}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \qquad \vec{u} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$$\vec{u} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \qquad e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}_{(1,1)} = e^y e^x + 4xy_{(1,1)} = e^2 + 4$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla} f = (e^2+4, e^2+2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}_{(1,1)} = e^x e^y + 2x^2_{(1,1)} = e^2 + 2$$

$$D^f_{\vec{u}} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} = (e^2+4, e^2+2)\cdot\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}e^2 + \frac{16}{5} + \frac{3}{5}e^2 + \frac{6}{5}$$

$$= \frac{7}{5}e^2 + \frac{22}{5}$$

$$\text{مساحت} = \int_{x=a}^{b} \underbrace{f(x)}_{\text{طول}} \; \underbrace{dx}_{\text{عرض}}$$

$$\text{حجم} = \int\!\!\int f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\int_{x=1}^{3} 2x^3 \, dx = \cancel{2}^{1} \frac{x^4}{\cancel{4}_{2}} \Big|_{x=1}^{3} = \frac{x^4}{2} \Big|^{3}$$

$$= \frac{3^4}{2} - \frac{1^4}{2} = \frac{81}{2} - \frac{1}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

انتگرال دوگانه

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=2y}^{1}(2xy-3)\,dx\,dy$$

$$\int_{y=0}^{1} 2y\frac{x^2}{2}-3x\Big|_{x=2y}^{1}dy=\int_{y=0}^{1}\left[y(1)^2-3(1)\right]-\left[y(2y)^2-3(2y)\right]dy$$

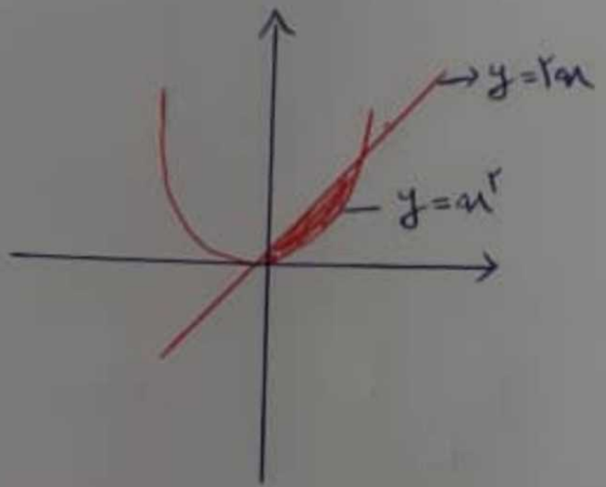
$$=\int_{0}^{1}(\underbrace{y-3-4y^3+6y}_{+7y})\,dy)\,dy=7\frac{y^2}{2}-3y-\cancel{4}\frac{y^4}{\cancel{4}}\Big|^{1}$$

$$\int_{0}^{1}=\left[\frac{7}{2}(1)^2-3(1)-(1)^4\right]-\left[\cancel{\frac{7}{2}(0)^2-3(0)-0^4}\right]^{0}$$

$$=\frac{7}{2}-3-1=\frac{7}{2}-4=\frac{7}{2}-\frac{8}{2}=-\frac{1}{2}$$

مثال: مطلوبست مساحت محدود به خط $y=2x$ و سهمی $y=x^2$

امتحانی



$$\left|\begin{matrix}2x\\ \\ x^2\end{matrix}\right. \Rightarrow 2x=x^2 \Rightarrow x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

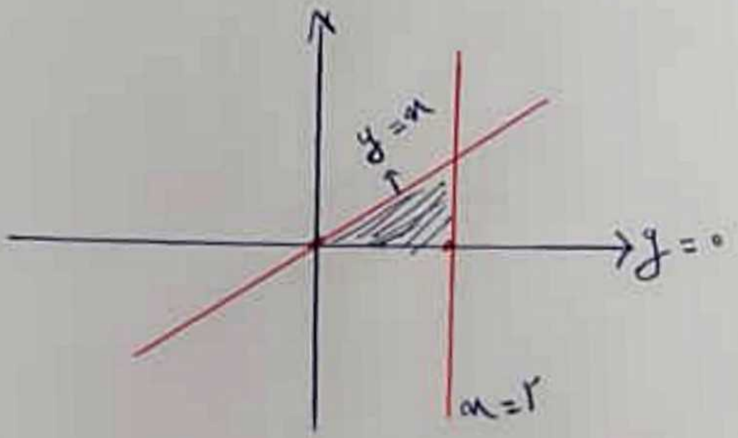
$$\begin{cases}x=0\\ x=2\end{cases}$$

$$S=\iint 1\,dx\,dy=\int_{x=0}^{2}\int_{y=x^2}^{2x} 1\,dy\,dx=$$

$$=\int_{x=0}^{2} y\Big|_{x^2}^{2x}\,dx=\int_{x=0}^{2} 2x-x^2\,dx$$

$$=2\frac{x^2}{\cancel{2}}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\left[2^2-\frac{2^3}{3}\right]-\left[0^2-\frac{0^3}{3}\right]=4-\frac{8}{3}$$

- مثال: مطلوبست محاسبه حجم رویه‌ای که از پایین محدود به $y=x$ و $x=2$ و محور xها می‌باشد و از بالا به $Z=3$ می‌باشد.



$$V=\int_{Z=0}^{3}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{x} 1\,dy\,dx\,dZ=$$

$$=\int_{Z=0}^{3}\int_{x=0}^{2} y\Big|_{y=0}^{x} dx\,dZ=\int_{Z=0}^{3}\int_{x=0}^{2} x-0\,dx\,dZ=$$

$$=\int_{Z=0}^{3}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{2} dZ=\int_{Z=0}^{3}\cancel{\frac{4}{2}}^{\,2}-\cancel{\frac{0}{2}}^{\,0}\,dZ=$$

$$=\int_{Z=0}^{3} 2\,dZ=2Z\Big|_{Z=0}^{3}=2\times 3-2\times 0=6-0=6$$

همگرایی و واگرایی سری

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i =$$

آزمون نسبت

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \quad \begin{cases} l < 1 & \text{سری همگرا} \\ l = 1 & \\ l > 1 & \text{سری واگرا} \end{cases}$$

مثال:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8}$$

- حل با استفاده از آزمون نسبت داریم.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\,2^n}{n\,2^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2n} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

سری همگرا است.

آزمون ریشه nام

- مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$$

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim \left(\left(\frac{2}{n}\right)^n \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

همگرا

احتمال

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$ ترتیب مهم است

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$ n تعداد کل r تعداد انتخاب شده

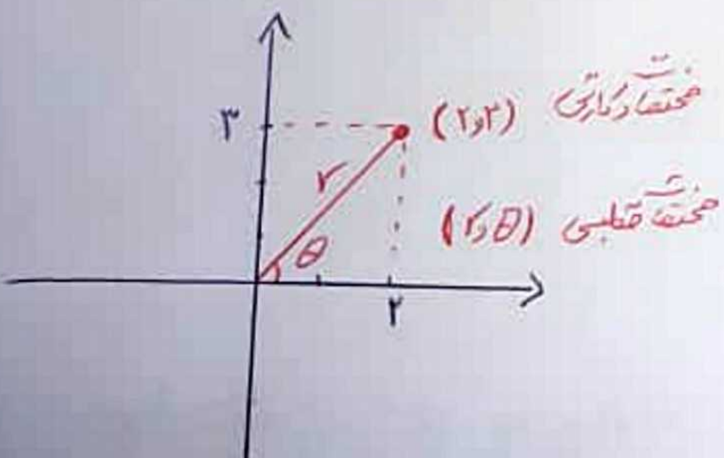
مثال: می خواهیم از میان ۲۰ نفر برگزیدگان یک مسابقه، ۲ نفر را برای اعطای جوایز اول و دوم انتخاب کنیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است.

حل:

$$P_{20}^{2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{20\times19\times\cancel{18!}}{\cancel{18!}} = 20\times19 = 380$$

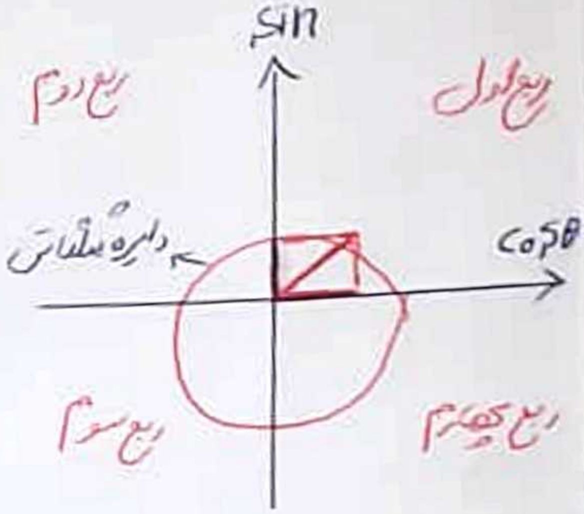
مثال: از میان دانش آموزان کلاس سوم که تعداد آنها ۱۸ نفر است، ۴ نفر برای تیم فوتبال انتخاب خواهند شد. به چند طریق می توان این کار را انجام داد.

$$C_{18}^{4} = \frac{18!}{\underbrace{(18-4)}_{14}!\times4!} = \frac{18\times17\times\overset{2}{\cancel{16}}\times\overset{5}{\cancel{15}}\times\cancel{14!}}{\cancel{14!}\times4\times3\times2\times1} = 3060$$



$$\begin{cases} (x,y) \longrightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x} \\[2ex] (r,\theta) \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \end{cases}$$

- مثال: نقطه $P=(2, \frac{3\pi}{4})$ قطبی را به مختصات دکارتی و نقطه $Q=(-2, -\sqrt{3})$ را به مختصات قطبی (r,θ) تبدیل کنید.



$$P=(2, \frac{3\pi}{4}) \rightarrow \begin{cases} x = 2 \times \cos\frac{3\pi}{4} \\ y = 2 \times \sin\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$P=(2, \frac{3\pi}{4}) \rightarrow \begin{cases} x = 2 \times \cos\frac{3\pi}{4} = 2 \times -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \\ y = 2 \times \sin\frac{3\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$Q=(-3, -\sqrt{3}) = i \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} \\ \tan\theta = \frac{+\sqrt{3}}{+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{7\pi}{6}} \end{cases}$$

- مقدار عبارت $\sin 135^\circ + \cos 225^\circ + \tan 405^\circ$ را بدست آورید.

حل:

$$\sin(90+45) + \cos(180+45) + \tan(360+45) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1$$

مثال: فاصله نقطه A روی محور x ها از نقطه (۲و۲) برابر ۲√۲ است مختصات نقطه A را تعیین کنید.

حل:

$y=0 \qquad A=(x,y)$

$$2\sqrt{2}=\sqrt{(x-2)^2+(0-2)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 8=(x-2)^2+4 \Rightarrow (x-2)^2=8-4=4$$

$$\Rightarrow x-2=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

مثال: دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+2z=3 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-z=2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R_1+R_3]{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{R_2}{-2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -5 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2+R_3]{-R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{R_3}{-\frac{7}{2}}}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_3+R_1]{-\frac{3}{2}R_3+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}$$

$$-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{2}{2}=-1$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$$