معادلات زیر را حل کنید

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{e^y}$

جدا شدنی

$e^y dy = \sin x \, dx \Rightarrow \int e^y dy = \int \sin x \, dx \Rightarrow e^y = -\cos x + c$

$\Rightarrow y = \ln(-\cos x) + C$.

2) $(\underbrace{2xy+3}_{P})dx + (\underbrace{x^2+8y}_{Q})dy = 0$

معادله کامل

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

معادله کامل است.

$\int P dx = \int 2xy+3 \, dx = \dfrac{2x^2}{2}y + 3x + f(y) = x^2 y + 3x + f(y)$

نسبت به y مشتق میگیریم و برابر Q قرار میدهیم

$x^2 + f'(y) = x^2 + 8y \Rightarrow f'(y) = 8y \Rightarrow f(y) = 8\dfrac{y^2}{2} + c$

$\Rightarrow \boxed{x^2 y + 3x + 4y^2 = C \quad \text{جواب معادله}}$

2

3) $y' - xy = x \quad , \quad y(0) = 0$

خطی مرتبه اول

حل)

$$y = e^{-\int -x\,dx}\left(\int x\, e^{\int -x\,dx}\, dx + c\right)$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}}\left(\int x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + c\right) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + c\right)$$

$$= -e^{0} + ce^{\frac{x^2}{2}} = -1 + ce^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow 0 = -1 + ce^{\frac{0}{2}} \Rightarrow 0 = -1 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -1 + e^{\frac{x^2}{2}}}$$ جواب نهایی

---

4) $y'' + 2y' + 10y = 0$

خطی مرتبه دوم همگن

$$t^2 + 2t + 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times(10)(1) = 4 - 40 = -36$$

$$t_1, t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{36}}{2} = -1 \pm 3i$$

جواب

$$\boxed{y = e^{-x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)}$$

ه) $2xy\,dy + (x^2-y^2)\,dx = 0$

معادله همگن

$2(tx)(ty) = 2t^2xy = t^2(2xy) \Rightarrow$ از مرتبه ۲

$(tx)^2 - (ty)^2 = t^2x^2 - t^2y^2 \Rightarrow t^2(x^2-y^2) \Rightarrow$ ۲ از مرتبه

پس هر دو معادله همگن و هم‌مرتبه هستند. از تغییر متغیر $y = vx$

استفاده خواهیم کرد.

$dy = v\,dx + x\,dv$

با جایگذاری y و dy خواهیم داشت:

$2x(vx)(v\,dx + x\,dv) + (x^2 - v^2x^2)\,dx = 0$

$x^2(2v^2dx + 2vx\,dv) + x^2(1-v^2)\,dx = 0$

$2v^2dx + 2vx\,dv + (1-v^2)\,dx = 0 \qquad 2vx\,dv + (1+v^2)\,dx =$

$\frac{dx}{x} + \frac{2v}{1+v^2}dv = 0 \xrightarrow{\text{جداشدنی}} \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{2v}{1+v^2}dv$

$\ln x = -\ln(1+v^2) = -\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + C.$

و) $y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x}$ نوع جواب خصوصی معادله دیفرانسیل

را بنویسید.

$t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 2$ ریشه مضاعف

$y_p = (c_1 + c_2x)e^{2x}.$