جزوه آمار و احتمال و کابرد آن در مدیریت 1

فصل اول: آمار توصیفی

جامعه: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که در یک زمان و مکان مشخصی دارای یک یاچند صفت مشترک هستند. تعداد اعضای جامعه را حجم جامعه گویند و با N نمایش داده می‌شود.

نمونه: انتخاب بخشی از جامعه برای مطالعه‌ی صفتی از جامعه که طبق یک ضابطه و قاعده‌ی خاص انجام می‌گیرد. نمونه باید به خوبی معرف جامعه باشد زیرا اطلاات به‌دست آمده از نمونه را باید به جامعه تعمیم دهیم. تعداد اعضای نمونه را حجم نمونه گویند و با n نمایش می‌دهند.

مثال: برای هر یک از موارد زیر جامعه را مشخص کنید:

الف) بررسی کیفیت محصولات یک کارخانه به‌خصوص **جامعه: محصولات یک کارخانه**

ب) بررسی وضعیت تحصیلی دانشجویان دانشگاه اشرفی **جامعه: دانشجویان دانشگاه اشرفی**

ج) بررسی تعداد بیکاران استان اصفهان **جامعه: ساکنین استان اصفهان**

پارامتر: مقادیر و اندازه‌هایی که مربوط به جامعه هستند و معمولا مقادیر آن‌ها نامعلومند و با حروف لاتین مانند $\theta, \alpha, \beta, \gamma, \sigma, \ldots.$ نمایش داده می‌شوند.

آماره: مقادیر و اندازه‌هایی که مربوط به نمونه هستند و به عنوان تخمین (برآورد) برای پارامتر نامعلوم جامعه استفاده می‌شوند. آماره تابعی است از نمونه تصادفی. فرض کنید نمونه‌ای تصادفی از جامعه گرفته‌ایم، مقادیر نمونه را با $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ نمایش می‌دهیم. لذا آماره همیشه برحسب تابعی از $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ نمایش داده می‌شود.

مثال: برای هر یک از موارد زیر پارامتر آماره را مشخص کنید:

الف) نظر دانشجویان راجع به امتحان چهارگزینه‌ای **پارامتر**

ب) تعداد ساعات مطالعه غیر درسی 100 دانشجوی دانشگاه اشرفی **آماره**

ج) تعداد بیماران دیابتی 1000 نفر از ساکنین شهر اصفهان **آماره**

د) میزان رضایت شغلی کارکنان سازمان آموزش و پرورش **پارامتر**

ه) متوسط هوش دانش‌آموزان ابتدایی **پارامتر**

مثال: پژوهشگری فهرست اسامی دانشجویان رشته روانشناسی را در اختیار دارد و قصد دارد متوسط افسردگی آن‌ها را بسنجد. او از این فهرست 30 نفر را به طور تصادفی انتخاب کرده است و با اجرای پرسشنامه، میانگین افسردگی آن‌ها را سنجیده است. در این پژوهش، جامعه، نمونه، پارامتر و آماره را مشخص کنید.

جامعه: دانشجویان رشته روانشناسی

نمونه: 30 دانشجوی رشته روانشناسی

پارامتر: متوسط افسردگی دانشجویان رشته روانشناسی

آماره: متوسط افسردگی 30 دانشجوی رشته روانشناسی

متغیر: مشاهدات و اندازه‌گیری های به دست آمده که از فردی به فردی دیگر یا از شئی به شئی دیگر متفاوت است را متغیر گویند.

انواع متغیرها: **1. کمی 2.کیفی**

- متغیرهای کمی متغیرهایی هستند که قابل اندازه‌گیری هستند و می‌توان به صورت عددی بیان کرد. در واقع این متغیرها ذاتا عددی هستند. مانند وزن، قد، معدل
- متغیرهای کیفی متغیرهایی هستند که به صورت عددی قابل بیان نیستند اما می‌توان به آنها عدد نسبت داد و در واقع این متغیرها توصیفی هستند. مانند گروه خونی، شغل، مدرک تحصیلی

دسته‌بندی دیگری که می‌توان برای متغیرها درنظر گرفت عبارتند از: **1. گسسته 2. پیوسته**

- متغیر گسسته متغیری است تنها مقادیرصحیح اختیار می‌کند و مقاددیر اعشاری در آنها مفهومی ندارند. مانند تعداد دانشجویان، تعداد بیماران، تعداد فرزندان
- اما متغیرهای پیوسته متغیرهایی هستند که هر مقداری را می‌تواند اختیار کند و رقم اعشار در آن مفهوم دارد. مانند وزن، دما، معدل، فشار خون، زمان

نکته: بعضی مواقع به دلیل فقدان ابزار اندازه‌گیری دقیق و مناسب، ناگزیریم که برخی متغیرهای پیوسته را گسسته درنظر بگیریم. مانند سن- بهره هوشی

مثال: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید. (پیوسته یا گسسته)

سن	**پیوسته**	رفتار پرخاشگرانه	**گسسته**	تعداد صندلی‌های یک کلاس	**گسسته**
روحیه	**گسسته**	رنگ چشم	**گسسته**	سطح هموگلوبین خون	**پیوسته**
قد	**پیوسته**	اندازه مشت	**پیوسته**	میزان هوش	**پیوسته**

تعداد بیماران عفونت های بیمارستانی (نخاعی، مغزی، چشمی، زخم جراحی) **گسسته**

متغیرهای مستقل و وابسته:

متغیر مستقل متغیری است که مقادیر آن در دست محقق می‌باشد و می‌تواند مقادیر آن را تغییر دهد در واقع متغیر مستقل متغیر اثرگذار است.

متغیر وابسته متغیری است که مقادیر آن در دست محقق نیست و مقادیر آن براساس متغیر مستقل تغییر می‌کند. در واقع متغیر وابسته متغیر اثرپذیر است.

مثال: برای موارد زیر متغیر واسبته و مستقل را تعیین کنید:

الف) میزان هوش و مصرف ماد غذایی **مستقل: مصرف مواد غذایی** **وابسته: میزان هوش**

ب) میزان حافظه و سن **مستقل: سن** **وابسته: حافظه**

ج) بررسی اثرتعداد ساعات ورزش، مصرف قرص و رژیم غذایی بر روی میزان دیابت

مستقل: ساعات ورزش، مصرف قرص و رژیم غذایی **وابسته: میزان دیابت**

د) میزان تبلیغات شرکت و میزان فروش **مستقل: میزان تبلیغات شرکت** **وابسته: میزان فروش**

مقیاس اندازه‌گیری:

اساسی‌ترین فعالیت در هر پژوهش، اندازه‌گیری است. اندازه‌گیری فرآیندی است که از طریق آن، مشاهده‌ها به عدد تبدیل می‌شوند. به طور کلی اندازه‌گیری عبارت است از نسبت عددی دادن به صفت مورد مطالعه است. طرز تخصیص عدد را اندازه‌گیری یا مقیاس‌گذاری گویند.

چهار مقیاس اندازه‌گیری یا چهار طریقه‌ی تخصیص عدد وجود دارند که عبارتند از اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبی. هر کدام از این مقیاس‌ها قوانین و محدویت‌های خاصی دارند.

نکته: مقیاس اسمی و ترتیبی مربوط به متغیرهای کیفی است و مقیاس فاصله‌ای و نسبی مربوط به متغیرهای کمی هستند.

مقیاس اسمی: این مقیاس برای شناسایی افراد یا اشیاء به کار می‌رود و مقادیری که به آن نسبت می‌دهیم فقط اعداد طبیعی هستند. در این مقیاس چهار عمل اصلی کاربرد ندارند و هدف فقط طبقه‌بندی و تشخیص طبقات از یکدیگر است. مانند جنسیت، وضعیت تاهل، شغل، گروه خونی.

مقیاس ترتیبی: این مقیاس همانند مقیاس اسمی به طبقه‌بندی و نام‌گذاری طبقه‌ها می‌پردازد و فقط اعداد طبیعی را اختیار می‌کند. اما علاوه بر آن به ترتیب طبقه‌ها نیز نظر دارد. در این مقیاس نیز چهار عمل اصلی کاربرد ندارند. مانند نظر دانشجویان به امکانات دانشگاه، مدرک تحصیلی، میزان مهارت کارگران یک کارگاه.

مقیاس فاصله‌ای: این مقیاس می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند و به ما اجازه می‌دهد فاصله‌های موجود بین افراد، اشیاء و رویدادها را مشخص کنیم.

نکته 1) در این مقیاس تنها جمع و تفریق معنا دارد ولی ضرب و تقسیم مفهومی ندارد. مثلا فرد A در سال 45 به دنیا آمده است و فرد B در سال 90. نمی‌توان گفت فرد A دو برابر زودتر به‌دنیا آمده است ولی می‌توان گفت فرد A، 45 سال زودتر به دنیا آمده است.

نکته2) در این مقیاس صفر مطلق معنا ندارد و صفر در این مقیاس جنبه قراردادی دارد یعنی کسی که در آزمون هوش نمره صفر می‌گیرد به این معنا نیست که آن فرد هیچ هوشی ندارد.

مقیاس نسبی: این مقیاس می‌تواند هر عدد حقیقی را اختیار کند. در این مقیاس چهار عمل اصلی کاربرد دارد. در این مقیاس صفر مطلق معنا دارد و نسبت دو مقدار با تغییر واحد اندازه‌گیری ثابت می‌ماند. مانند وزن، قد.

مثال: مقیاس اندازه‌گیری هر یک از موازد زیر را تعیین کنید:

الف) مدت زمان پاسخ‌گویی به سوالات یک امتحان **نسبی** ب) زمان تشکیل اولین کلاس **فاصله‌ای**

پ) رشته تحصیلی **اسمی** ت) ارزیابی تحصیلی: ضعیف، معمولی، خوب **ترتیبی**

ث) سن دانش‌آموز **نسبی** ج) رنگ اتومبیل‌های موجود در یک نمایشگاه **اسمی**

چ) درجه حرارت کلاس **فاصله‌ای** ح) گنجایش آب یک تانکر **نسبی**

خ) تعداد شکایات به یک پاسگاه **نسبی** د) درآمد دانشجویان شاغل **نسبی**

جدول فروانی و نمودارهای آماری

ساده‌ترین راه برای مرتب سازی و طبقه‌بندی داده‌ها تنظیم جدول فراوانی است. هر جدول فراوانی شامل 5 ستون است که عبارتند از مشاهدات، فراوانی، فراوانی تجمعی، فراوانی نسبی و فراوانی نسبی تجمعی است، که در ادامه به توضیح آنها می‌پردازیم:

نکته: همیشه به یاد داشته باشید که در جدول فراوانی در ستون اول مشاهدات باید از کوچک به بزرگ مرتب شوند.

فراوانی (f_i): به تعداد تکرار هر مشاهده فراوانی آن مشاهده گویند. فرض کنید n مشاهده (داده) در k طبقه (گروه، رده) به صورت $x_1, x_2, \dots, x_k$ داشته باشیم به طوری که تعداد تکرار آن‌ها به صورت $f_1, f_2, \dots, f_k$ باشد. در این صورت به f_i فراوانی مشاهده i-ام می گویند.

نکته: همیشه جمع فراوانی ها برابر است با تعداد کل داده ها

فراوانی تجمعی (g_i): اگر فراوانی هر مشاهده را با فراوانی مشاهدات قبل از آن جمع کنیم، فراوانی تجمعی آن مشاهده به دست می‌آید، یعنی:

$$g_1 = f_1 \ , \qquad g_2 = f_1 + f_2 \ , \qquad g_3 = f_1 + f_2 + f_3 \qquad g_k = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k$$

فراوانی نسبی (r_i): اگر فراوانی هر مشاهده را به تعداد کل مشاهدات تقسیم شود، فراوانی نسبی آن مشاهده به دست می‌آید، یعنی:

$$r_1 = \frac{f_1}{n} \ , \quad r_2 = \frac{f_2}{n} \ , \quad r_3 = \frac{f_3}{n} \ , \dots , \quad r_k = \frac{f_k}{n}$$

نکته: توجه کنید جمع فراوانی‌های نسبی همواره برابر یک است

فراوانی نسبی تجمعی (S_i): فروانی تجمعی هر مشاهده را بر تعداد کل داده‌ها تقسیم کنیم، یعنی:

$$S_1 = \frac{g_1}{n} \;,\quad S_2 = \frac{g_2}{n} \;,\quad S_3 = \frac{g_3}{n} \;,\ldots,\; S_k = \frac{g_k}{n}$$

مثال: تعداد بیمارانی که در مدت 23 روز به یک کلینیک مراجعه می‌کنند به شرح زیر هستند:

14 10 12 15 14 12 13 11 17 12 14 15 11 12 14 13 12 15 15 11 14 15 14

الف) جدول فراوانی این داده‌ها را تنظیم کنید.

ب) چند درصد از روزها حداکثر 12 بیمار مراجعه می‌کند.

ج) چند درصد از روزها بیش از 14 بیمار مراجعه می‌کند.

x	f	g	r
10	2	2	0.09
11	3	5	0.13
12	5	10	0.23
13	2	12	0.09
14	6	18	0.26
15	5	23	0.23
جمع	23		

ب $\quad (0.09 + 0.13 + 0.23) \times 100 = 45\%$

ج $\quad 0.23 \times 100 = 23\%$

جدول فراوانی برای داده‌های پیوسته: برای داده‌های پیوسته باید داده‌ها را به تعدادی فاصله (رده) با طول مساوی تقسیم کنیم و در هر رده فراوانی داده‌ها را شمارش کنیم. برای تعیین تعداد رده‌ها و طول رده‌ها از روش استورکز استفاده می‌کنیم که شامل مراحل زیر است:

1. محاسبه تعداد طبقات 2. محاسبه دامنه تغییرات 3. محاسبه طول طبقات

1. محاسبه تعداد طبقات (k): فرض کنید تعداد کل داده‌ها برابر n باشد، در این صورت تعداد طبقات برابر خواهد بود با:

$$k = [1 + 3.322 \times \log n]$$

یک روش ساده‌تر، استفاده از $2^k \geq n$ می‌باشد. به k مقدار 1و2و 3 و ... را اختصاص می‌دهیم، اولین عددی که در این نابرابری صدق کند برابر تعداد طبقات است.

مثال: الف) فرض کنید تعداد داده‌های پیوسته برابر 35 باشد تعداد طبقات را مشخص کنید:

$$2^k \geq n \quad \rightarrow \quad 2^k \geq 35 \quad \rightarrow \quad k = 6$$

ب) فرض کنید تعداد داده‌های پیوسته برابر 100 باشد تعداد طبقات را مشخص کنید:

$$\boldsymbol{2^k \geq n \quad \rightarrow \quad 2^k \geq 100 \quad \rightarrow \quad k = 7}$$

2. **محاسبه دامنه تغییرات** (R): از فرمول زیر دامنه تغییرات را به دست می‌آوریم:

$$R = x_{max} - x_{min}$$

که x_{max} و x_{min} از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$x_{max} = \text{بزرگترین عدد} + s \qquad \text{و} \qquad x_{min} = \text{کوچکترین عدد} - s$$

برای محاسبه مقدار s باید به داده‌ها رجوع کنیم. اگر تمام داده‌ها صحیح باشند و رقم اعشار نداشته باشند مقدار s برابر 0/5 است. اگر در بین داده‌ها حداقل یک عدد با یک رقم اعشار حضور داشته باشد مقدار s برابر 0/05 است. اگر در بین داده‌ها حداقل یک عدد با دو رقم اعشار حضور داشته باشد s برابر 0/005 است و الی آخر.

معمولا داده‌های سوال به صورت صحیح هستند پس در این صورت مقدار R برابر خواهد بود با:

$$\boldsymbol{R} = \text{بزرگترین عدد} - \text{کوچکترین عدد} + \boldsymbol{1}$$

3. **محاسبه طول طبقات** (w): طول طبقات از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$w = \frac{R}{k}$$

اگر عدد محاسبه شده صحیح باشد در این صورت طول طبقات برابر مقدار به دست آمده خواهد بود. در صورتی‌که عدد به دست آمده اعشاری به دست آید باید مجددا به داده‌ها رجوع کنیم:

- اگر تمام داده‌ها صحیح باشند و رقم اعشار نداشته باشند w را به عدد صحیح به بالا رند می‌کنیم.
- اگر در بین داده‌ها حداقل یک عدد با یک رقم اعشار حضور داشته باشد w را تا یک رقم اعشار به بالا رند می‌کنیم.
- اگر در بین داده‌ها حداقل یک عدد با دو رقم اعشار حضور داشته باشد w را تا دو رقم اعشار به بالا رند می‌کنیم و الی آخر.

مثال: فرض کنید تعداد طبقات برابر 7 و دامنه تغییرات برابر 32 باشد، برای هر یک از موارد زیر طول طبقات را به دست آورید:

الف) در بین داده‌ها حداقل یک عدد با دو رقم اعشار حضور دارد.

ب) تمام داده‌ها صحیح هستند.

ج) در بین داده‌ها حداقل یک عدد با یک رقم اعشار حضور دارد.

جواب:

$$k = 7 \quad R = 32 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{R}{k} = 4.5714$$

الف) $w = 4.58$ ب) $w = 5$ ج) $w = 4.6$

مثال: داده‌های زیر وزن 35 جعبه تولیدی یک کارخانه را نشان می‌دهد

8 6 6 4 2 7 1 5 2 4 4 1 1 3 6 3 11 9 3 6 6 3 2 3 8 6 5 7 5 5 5 4 4 5 2

الف) دادهها را طبقه بندی کنید. برای این داده‌ها به چند طبقه با چه طولی نیازمندیم؟

ب)جدول فراوانی این داده‌ها را تنظیم کنید.

ج)چه نسبتی از جعبه‌ها وزنی حداکثر 4/5 دارند.

د) چند درصد از جعبه‌ها وزنی بین 2/5 تا 8/5 دارند

ه) چند درصد از جعبه ها وزنی بیش تر از 4/5 دارند.

جواب: الف)

$$2^k \geq n \quad \Rightarrow \quad 2^k \geq 35 \quad \Rightarrow \quad k = 6$$ تعداد طبقات

$$R = \text{بزرگترین عدد} - \text{کوچکترین عدد} + 1 = 11 - 1 + 1 = 11$$

$$w = \frac{11}{6} = 1.83 \sim 2$$ طول طبقات

طبقات	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی
0.5-2.5	7	0.2	7
2.5-4.5	10	0.29	17
4.5-6.5	12	0.34	29
6.5-8.5	4	0.11	33
8.5-10.5	1	0.03	34
10.5-12.5	1	0.03	35
جمع	35		

ج $0.2 + 0.29 = 0.49$

د $(0.29 + 0.34 + 0.11) \times 100 = 74\%$

ه $(0.34 + 0.11 + 0.03 + 0.03) \times 100 = 51\%$

رسم نمودارهای آماری:

یک روش بصری برای این که بتوان اطلاعات نهفته در داده‌ها را تا حدودی بدون توضیح و تفسیر مشاهده کرد رسم نمودار است. یکی از علل استفاده از روش های مصورسازی اطلاعات برای آنالیز داده ها دستیابی و درک سریع اطلاعات و الگوهای موجود است.

انواع نمودارها برای داده‌های گسسته: میله‌ای (Bar chart)- نمودار دایره‌ای (Pie chart)

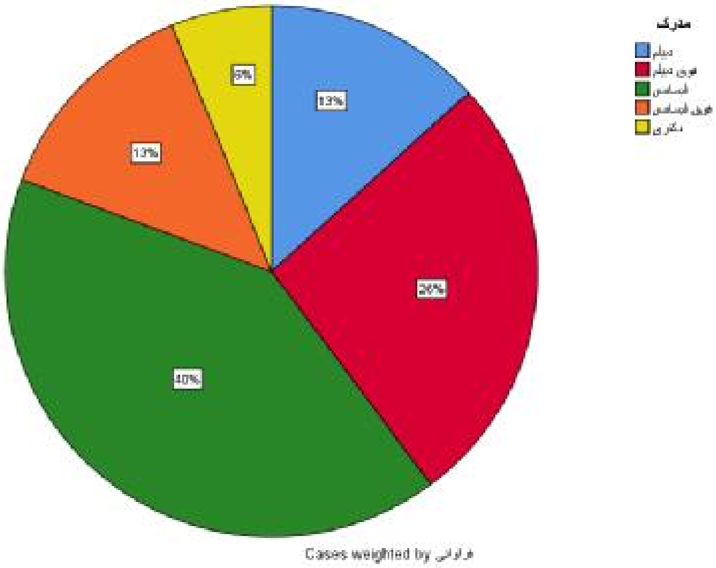
در نمودار میله‌ای: دو محور عمود بر هم رسم می‌کنیم. روی محور افقی مشاهدات از کوچک به بزرگ و روی محور عمودی فراوانی یا فراوانی نسبی.

در نمودار دایره‌ای: دایره ای رسم کرده و از مرکز به تعداد طبقات قسمت بندی می‌کنیم، هر قسمت را یک قطاع گویند. زاویه هر قطاع از رابطه‌ی $\alpha_i = r_i \times 360$ به‌دست می‌آید.

مثال: جدول زیر نشان دهنده مدرک تحصیلی 15 کارمند یک شرکت است. نمودار دایره ای را برای این جدول رسم کنید.

نوع مدرک	دیپلم	فوق دیپلم	لیسانس	فوق لیسانس	دکتری
تعداد	2	4	6	2	1

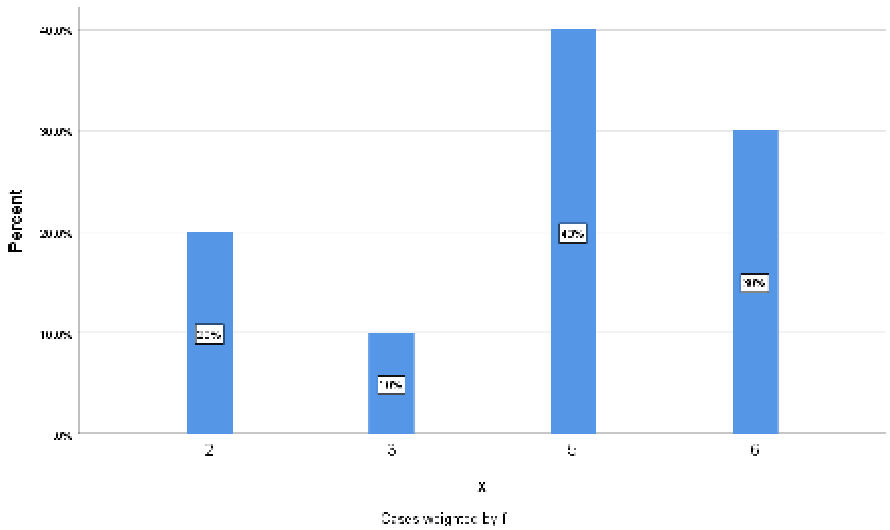
نوع مدرک	**فراوانی**	**فراوانی نسبی**	$\alpha_i = r_i \times 360$
دیپلم	2	0.13	$\mathbf{0.13 \times 360 = 46.8}$
فوق دیپلم	4	0.27	97.2
لیسانس	6	0.4	144
فوق لیسانس	2	0.13	46.8
دکتری	1	0.07	25.2
جمع	15		



تمرین: داده‌های زیر مربوط به تعداد دانشجویان فارغ التحصیل شده از 20 رشته است. نمودار میله‌ای را رسم کنید.

2 6 5 5 5 2 2 6 6 3 5 5 6 2 5 5 6 6 3 5

x	f	r
2	4	0.2
3	2	0.1
5	8	0.4
6	6	0.3
جمع	20	1



انواع نمودارها برای داده‌های پیوسته: هیستوگرام (Histogram)- نمودار چندبر فراوانی

نمودار هیستوگرام: مانند نمودار میله‌ای است با این تفاوت که بر روی محور افقی کران پایین و بالای طبقات قرار می‌گیرد و به جای رسم یک خط مستقیم یک مستطیل رسم می‌شود و مستطیل‌ها به هم چسبیده هستند. می‌توان طول هر طبقه را یک درنظر گرفت و محور عمودی را فراوانی نسبی قرار داد تا جمع مساحت مستطیل‌ها برابر یک شود.

نمودار چندبر فراوانی: برای رسم این نمودار ابتدا مرکز هر طبقه را می‌یابیم. مرکز طبقه که به آن نماینده طبقه می‌گویند به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_i = \frac{\text{کران بالا} + \text{کران پایین}}{2}$$

سپس، یک طبقه فرضی اول همه طبقات و یک طبقه فرضی آخر همه طبقات یافته و نماینده آن طبقات را می‌یابیم، سپس دو محور عمود بر هم رسم کرده و مرکز طبقات را روی محور افقی و فراوانی نسبی را محور عمودی قرار می‌دهیم. مرکز طبقات را با فراوانی نسبی آن تلاقی داده و یک نقطه رسم می‌کنیم و در آخر نقاط رسم شده را به یکدیگر وصل می‌نماییم. چندضلعی به دست آمده را چندبر فراوانی می‌گویند.

مثال: جدول زیر مربوط به میزان اضطراب 30 نفر است. نمودار هیستوگرام، چندبر فراوانی را رسم کنید.

نماینده طبقه	فراوانی نسبی	فراوانی	طبقات
$\frac{6.5+10.5}{2} = 8.5$	0.17	5	6/5-10/5
12.5	0.2	6	10/5-14/5

14/5-18/5	8	0.27	16.5
18/5-22/5	11	0.37	20.5
جمع	30		

نمودار را خودتان رسم کنید.

شاخص‌ها یا معیارهای آماری:

بعد از تنظیم جدول فراوانی و رسم نمودارهای آماری، لازم است که اطلاعات موجود در داده‌ها را در یک یا چند عدد خلاصه کنیم. این مقادیر را معیارهای آماری گویند و به دو طبقه‌ی معیار مرکزی و پراکندگی تقسیم می‌شوند.

معیار مرکزی:

میزان گرایش به مرکز داده‌ها را اندازه می‌گیرند (مقادیری هستند که مرکزیت داده‌ها را مشخص می‌کنند به طوری‌که داده‌ها حول آن‌ها قرار گرفته‌اند.) و شامل میانگین، میانه، نما(مد) و چندک هستند.

معیار پراکندگی:

مقادیری هستند که مشخص می‌کنند داده‌ها چقدر از هم دور و چقدر به هم نزدیک هستند.

میانگین حسابی(Arthmetic mean): فرض کنید داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_k$ به ترتیب دارای فراوانی‌های $f_1, f_2, \dots, f_k$ باشند و تعداد کل داده‌ها برابر $\boldsymbol{n}$ باشد، میانگین داده‌ها از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{n}$$

توجه کنید اگر داده‌ها گسسته باشند x_i خود داده‌ها و اگر پیوسته باشند x_i مرکز دسته (نماینده رده) است.

مثال: داده‌های زیر تعداد دندان های پوسیده 25 دانش‌آموز را نشان می‌دهد، میانگین داده‌ها را به‌دست آورید:

3 4 5 4 8 4 3 2 2 6 4 8 6 7 2 2 6 4 5 3 7 2 4 3 2

مقدار به دست‌آمده را تفسیر کنید.

جواب: **راه حل ساده جمع همه اعداد تقسیم بر تعداد است ولی برای راحتی می‌توان به صورت زیر عمل کرد:**

ابتدا هر عدد در تعداد ضرب می‌شود ، سپس مقادیر با هم جمع می‌شود و در نهایت بر تعداد کل داده‌ها تقسیم می‌شود

$$\bar{x} = \frac{(2\times 6)+(3\times 4)+(4\times 6)+(5\times 2)+(6\times 3)+(7\times 2)+(8\times 2)}{25} = \frac{106}{25} = 4.24$$

تفسیر: انتظار می‌رود هر دانش‌آموز به طور متوسط 4 دندان پوسیده داشته باشد.

مثال: جدول زیر مربوط به سن افراد شاغل را نشان می‌دهد، میانگین را محاسبه و تفسیر کنید.

طبقات	فراوانی
17/25-20/35	3
20/35-23/45	7
23/45-26/55	10
26/55-29/65	2

جواب: ابتدا لازم است مرکز هر طبقه را به دست آوریم:

طبقات	فراوانی	x_i	$x_i f_i$
17/25-20/35	3	18/8	56/4
20/35-23/45	7	21/9	153/3
23/45-26/55	10	25	250
26/55-29/65	2	28/1	56/2
			515/9

$$\bar{x} = \frac{515.9}{22} = 23.45$$

تفسیر: به طور متوسط سن افراد شاغل تقریبا 23 سال است.

تمرین: تعداد قرص‌های سرماخوردگی که در 27 خانواده در عرض یک ماه زمستان مصرف می‌شود عبارتند از:

3 2 5 4 4 4 0 4 0 2 0 1 3 4 4 2 3 3 0 2 2 1 4 3 2 1 0

میانگین داده‌ها را به‌دست آورید و مقدار آن را تفسیر کنید.

x_i	f_i	$x_i f_i$
0	5	0
1	3	3
2	6	12
3	5	15

4	7	28
5	1	5
جمع	27	63

$$\overline{x} = \frac{63}{27} = 2.3$$

انتظار میرود هر به طور متوسط خانواده 2 قرص سرماخوردگی مصرف کنند.

تمرین: جدول زیر، میزان اندوختهی شناختی 50 نفر را نشان میدهد. میانگین را محاسبه کرده و تفسیر کنید.

طبقات	فراوانی	x_i	$x_i f_i$
3/25-7/25	6	5.25	31.5
7/25-11/25	13	9.25	120.25
11/25-15/25	9	13.25	119.25
15/25-19/25	7	17.25	120.75
19/25-23/25	4	21.25	85
23/25-27/25	11	25.25	277.75
جمع	50		754.5

$$\overline{x} = \frac{754.5}{50} = 15.09$$

انتظار میرود میزان اندوختهی شناختی هر فردهر به طور متوسط 15.09 باشد.

(مد):

دادهای که فراوانی آن از سایر دادهها بیشتر باشد را نما یا مد گوییم و با نماد M نمایش میدهیم.

محاسبه نما (مد) برای داده‌های گسسته:

ابتدا فراوانی داده‌ها را به‌دست می‌آوریم.

داده‌ای که فراوانی آن از همه بیشتر است را به عنوان مد در نظر می‌گیریم.

اگر دو داده‌ی غیر مجاوردارای فراوانی یکسان و بیش از سایر فراوانی‌ها باشند هر دو را به عنوان مد در نظر می‌گیریم و داده‌ها را دو نمایی می‌گوییم.

در صورتی که این دو داده‌ها مجاور یکدیگر باشند نصف مجموع آن‌ها را به عنوان میانگین در نظر می‌گیریم.

در صورتی که تمام داده‌ها دارای فراوانی یکسان باشند گوییم داده‌ها مد ندارند.

مثال: داده‌های زیر تعداد مراجعه کنندگان به یک آزمایشگاه در ده روز را نشان می‌دهد، برای هر کدام مد را به‌دست آورید:

الف) 0 2 9 8 8 0 7 8 3 7 — **مد برابر 8 است**

ب) 1 2 5 6 3 0 6 4 7 5 — **مد برابر 5.5 است**

ج) 2 4 4 5 9 5 7 2 7 9 — **مد نداریم**

د) 5 7 1 5 4 1 7 5 6 1 — **مد برابر 1 و 6 است.**

محاسبه مد برای داده‌های پیوسته:

در این حالت داده‌ها را در یک جدول فراوانی مرتب می‌کنیم. رده‌ای که فراوانی آن از سایر رده‌ها بیشتر است را به عنوان رده مد در نظر می‌گیریم. سپس از فرمول زیر نما را محاسبه می‌کنیم:

$$M = L_M + \frac{D_1 w}{D_1 + D_2}$$

$\boldsymbol{L_M}$: کران پایین طبقه‌ی مد

$\boldsymbol{D_1}$: اختلاف فراوانی طبقه‌ی مد با طبقه‌ی قبلی

$\boldsymbol{D_2}$: اختلاف فراوانی طبقه‌ی مد با طبقه‌ی بعدی

$\boldsymbol{w}$: طول طبقه

مثال:جدول زیر سن افراد شاغل در یک موسسه آموزشی را نشان می‌دهد، برای این جدول مد را محاسبه کنید و و مقدار آن را تفسیر کنید:

فراوانی	طبقات
2	20/5-25/5

25/5-30/5	6
30/5-35/5	10
35/5-40/5	8
40/5-45/5	4

$$M = L_M + \frac{D_1 w}{D_1 + D_2} = 30.5 + \frac{(10-6)\times 5}{(10-6)+(10-8)}$$
$$= 30.5 + \frac{20}{6} = 33.8$$

تفسیر: اکثر افراد این موسسه سنی تقریبا 34 سال دارند.

نکته: برای داده‌های پیوسته نیز اگر دو رده متوالی دارای فراوانی‌های یکسان و بیش از سایر فراوانی باشد، برای هر کدام جداگانه مد را محاسبه نموده و میانگین می گیریم. در صورتی که رده‌ها مجاور هم نباشند هر دو را به عنوان مد در نظر می گیریم.

مثال: جدول زیر مدت زمان مصرف برق نشان می‌دهد، برای این جدول مد را محاسبه کنید و مقدار آن را تفسیر کنید:

طبقات	فراوانی
5/35-8/55	14
8/55-11/75	6
11/75-14/95	10
14/95-18/15	14
18/15-21/35	2

$$M_1 = 5.35 + \frac{(14-0)\times(8.55-5.35)}{(14-0)+(14-6)} = 7.07$$

$$M_2 = 14.95 + \frac{(14-10)\times 3.2}{(14-10)+(14-2)} = 15.75$$

میانه:

عدد m را میانه گویند هرگاه حداقل نیمی از داده‌ها کوچکتر یا مساوی آن و حداقل نیمی بزرگتر یا مساوی آن باشند.

محاسبه میانه برای داده‌های گسسته:

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم. فرض کنید $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ شکل مرتب شده‌ی n داده باشند.

اگر تعداد داده‌ها فرد باشد آنگاه داده‌ی وسط میانه است یعنی: $m = x_{(\frac{n+1}{2})}$

اگر داده‌ها زوج باشند میانگین دو داده‌ی وسط، میانه است، یعنی: $m = \frac{x_{(\frac{n}{2})}+x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2}$

مثال: داده‌های زیر، داده‌های زیر، تعداد دفعاتی که دانشجویان در مدت تحصیل خود از کتابخانه دانشگاه کتاب امانت گرفته اند را نشان می‌دهد، مد و میانه را برای این داده‌ها مشخص کنید و و مقدار آنها را تفسیر کنید:

1 2 2 5 2 7 2 6 2 5 2 2 1 3 12 9 8 5 4 3 4 11 7 2

جواب:

1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 3 3 4 4 5 5 5 6 7 7 8 9 11 12

تعداد داده‌ها زوج است پس از فرمول زوج استفاده می کنیم:

$$m=\frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)}+x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}=\frac{x_{\left(\frac{24}{2}\right)}+x_{\left(\frac{24}{2}+1\right)}}{2}=\frac{x_{(12)}+x_{(13)}}{2}=\frac{3+4}{2}=3.5$$

نیمی از دانشجویان حداکثر 3 کتاب و نیمی از دانشجویان حداقل 4 کتاب امانت گرفته‌اند.

مقدار مد برابر 2 است یعنی اکثر دانشجویان 2 کتاب امانت گرفته‌اند.

مثال: داده‌های زیر، تعداد مراجعین به بانک در ساعت 8 تا 9 صبح را در عرض 21 روز نشان می‌دهد: مد و میانه را بیابید و و مقدار آنها را تفسیر کنید:

تعدادروزها	2	3	1	4	3	8
تعداد مراجعین	9	11	15	12	10	7

جواب:

تعدادمراجعین x_i	تعدادروزها f_i	فراوانی تجمعی
7	8	8
9	2	10
10	3	13
11	3	16
12	4	20
15	1	21

جمع	21	

$$m = x_{(\frac{n+1}{2})} = x_{(11)} = 10$$

نیمی از روزها حداکثر 10 مراجعه کننده و
نیمی از روزها حداقل 10 مراجعه کنند داشته است.

محاسبه میانه برای داده‌های پیوسته:

بعد از طبقه‌بندی داده‌ها، فراوانی تجمعی طبقات را به دست می‌آوریم. اولین رده‌ای که فراوانی تجمعی آن برابر یا بزرگتر از $\frac{n}{2}$ باشد را به عنوان رده میانه در نظر می‌گیریم. سپس از فرمول زیر میانه را محاسبه می‌کنیم:

$$m = L_m + \frac{\left(\frac{n}{2} - g_{m-1}\right) w}{f_m}$$

L_m: کران پایین طبقه‌ی میانه g_{m-1}: فراوانی تجمعی طبقه قبل از میانه

f_m: فراوانی طبقه میانه w: طول طبقه

مثال: جدول زیر مربوط به قد جوانان 40 ساله است. میانه را به‌دست آورید و مقدار آن را تفسیر کنید:

طبقات	فراوانی	**فراوانی تجمعی**
154/5-159/5	9	9
159/5-164/5	18	27
164/5-169/5	16	43
169/5-174/5	25	68
174/5-179/5	12	80

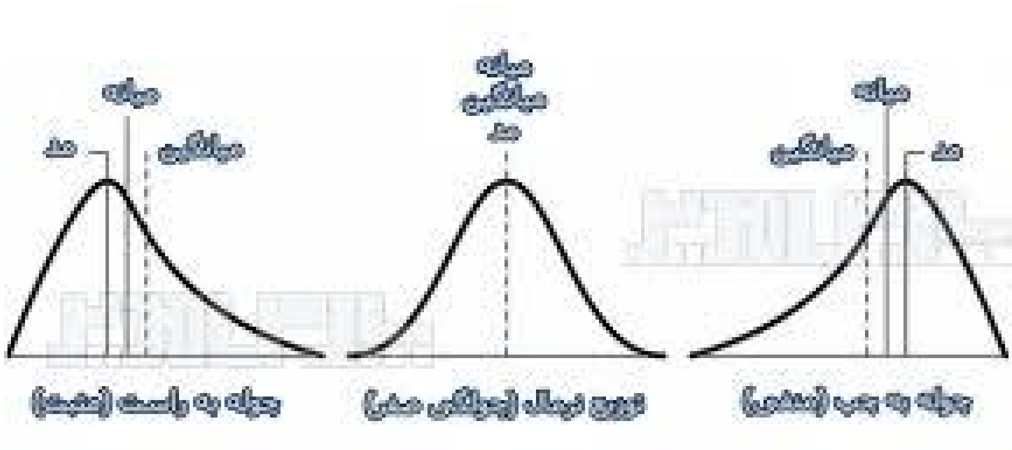
$$m = L_m + \frac{\left(\frac{n}{2} - g_{m-1}\right) w}{f_m}$$

$$= 164.5 + \frac{(40 - 27) \times 5}{16} = 168.56$$

نیمی از جوانان (40نفر) قدی حداکثر 168/56 و نیمی قدی حداقل 168/56 دارند.

چولگی:

میزان عدم تقارن منحنی فراوانی را چولگی گویند.



مثال : جدول زیر، جدول فراوانی تعدا فرزندان 200 خانواده است

تعداد فرزندان	0	1	2	3	4	5	6
تعداد خانواده‌ها	20	30	50	40	30	20	10

آیا داده‌ها متقارن هستند یا خیر.

جواب: کافی است میانگین، مد و میانه‌ی داده‌ها را محاسبه کنیم: میانگین برابر 2/65، مد برابر 2 و میانه برابر 2/5 محاسبه شده است. با توجه به ترتیب این مقادیر می‌توان نتیجه گرفت که داده‌ها چوله به راست هستند.

تعداد فرزندان x_i	تعداد خانواده‌ها f_i	$x_i f_i$	فراوانی تجمعی
0	20	0	20
1	30	30	50
2	50	100	100
3	40	120	140
4	30	120	170
5	20	100	190
6	10	60	200
جمع	200	530	

$$\bar{x} = \frac{530}{200} = 2.65$$

$$m = \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$$

$$= \frac{x_{(100)} + x_{(101)}}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$M = 2$$

تمرین: جدول زیر، وزن 20 دانشجو را نشان می‌دهد، آیا داده‌ها متقارن هستند یا خیر.

طبقات	فراوانی	x_i	$x_i f_i$	g_i
48/5-51/5	6	50	300	6
51/5-54/5	4	53	212	10
54/5-57/5	8	56	448	18
57/5-60/5	2	59	118	20
			1078	

$$\bar{x} = \frac{1078}{20} = 53.9$$

$$M = L_M + \frac{D_1 . w}{D_1 + D_2} = 54.5 + \frac{4 \times 3}{4+6} = 55.7$$

$$m = L_m + \frac{\left(\frac{n}{2} - g_{m-1}\right). w}{f_m} = 51.5 + \frac{(10-6) \times 3}{4} = 54.5$$

$\bar{x} < m < M \quad \rightarrow$ چولگی منفی یا چوله به چپ

چندک:

اگر p عددی بین صفر و یک باشد، عدد Q_p را چندک مرتبه‌ی p-ام گویند اگر 100p درصد داده‌ها قبل از آن (کوچکتر از آن) قرار گرفته باشند. مثلا $Q_{0.15}$ چندک مرتبه‌ی 0/15 گویند هرگاه تقریبا 15 درصد داده‌ها کوچکتر از آن باشند. چندک‌ها کلی‌تر از میانه هستند در حقیقت $Q_{0.5}$ همان میانه می‌باشد.

چندک‌های معروف:
- چارک‌ها
- دهک‌ها
- صدک‌ها

1. **چارک:** برای چارک، داده‌ها را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. در چارک اول p=0.25 است یعنی 25 درصد داده‌ها کوچکتر از آن هستند. چارک اول را با نماد Q_1 نمایش می‌دهند. در چارک دوم p=0. 5 است یعنی 50 درصد داده‌ها کوچکتر از آن هستند. چارک دوم را با نماد Q_2 نمایش می‌دهند. در چارک سوم p=0.75 است یعنی 75 درصد داده‌ها کوچکتر از آن هستند. چارک سوم را با نماد Q_3 نمایش می‌دهند.

توجه شود چارک دوم همان میانه است، یعنی $m = Q_2$

2. **دهک**: برای دهک، داده‌ها را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. دهک اول یعنی ده درصد داده‌ها کوچکتر از آن هستند و p=0.1 است و با نماد D_1 نمایش می‌دهند. برای دهک دوم، سوم،...، نهم به ترتیب مقدار p برابر است با 0/2، 0/3،...،0/9 و با نماد D_2، D_3،...، D_9 نمایش می‌دهند.

⋮

3. **صدک**: برای صدک، داده‌ها را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. صدک اول یعنی یک درصد داده‌ها کوچکتر از آن هستند و p=0.01 است و با نماد P_1 نمایش می‌دهند. برای صدک دوم، سوم تا نود و نهم به ترتیب مقدار p برابر است با 0/02، 0/03 تا 0/99 و با نماد P_2، P_3،...، P_{99} نمایش می‌دهند. مثلا صدک 78-ام را با نماد P_{78} نمایش می‌دهند یعنی 78 درصد داده‌ها کوچکتر از آن هستند.

محاسبه‌ی چندک برای داده‌های گسسته:

فرض کنید n داده‌ی گسسته داشته باشیم. برای محاسبه‌ی چندک مراحل زیر را طی می‌کنیم:

1. ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. فرض کنید $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$ شکل مرتب شده‌ی داده‌ها باشد.

2. مقدار **(n+1)p** را محاسبه می‌کنیم.

3. اگر مقدار به دست آمده در مرحله‌ی دوم صحیح باشد آن را با r نمایش می‌دهیم و مقدار چندک برابر خواهد بود با:

$$\boldsymbol{Q_p = x_{(r)}}$$

در صورتی که مقدار به دست آمده در مرحله‌ی دوم اعشاری باشد مقدار صحیح آنرا با r و مقدار اعشار آنرا با t نمایش می‌دهیم، سپس از فرمول زیر مقدار چندک را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r} \leftarrow \text{قسمت صحیح} \\ \boldsymbol{t} \leftarrow \text{قسمت اعشار} \end{array}\right\} \mathbf{(n+1) \times p}$$

$$\boldsymbol{Q_p = (1-t).x_{(r)} + t.x_{(r+1)}}$$

مثال 1: جدول زیر تعداد پاسخ‌های صحیح 80 دانشجو در یک آزمون 20 سوالی است.

تعداد پاسخ	18	12	13	11	15
تعداد دانشجو	4	3	26	30	17

صدک هفتاد و سوم و چارک اول و دهک چهارم را به‌دست آورید و مقادیر را تفسیر کنید.

جواب: **داده‌ها گسسته هستند. برای محاسبه چندک ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم سپس فراوانی تجمعی مشاهدات را باید محاسبه کنیم:**

تعداد پاسخ x_i	تعداد دانشجو f_i	فراوانی تجمعی
11	30	30
12	3	33
13	26	59
15	17	76
18	4	80

صدک هفتاد و سوم:

$$p = 0.73 \quad \rightarrow \quad (n+1)p = 81 \times 0.73 = 59.13 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r = 59 \\ t = 0.13 \end{cases}$$

$$Q_p = (1-t)x_{(r)} + tx_{(r+1)} = (1-0.13) \times x_{(60)} + 0.13 \times x_{(61)} = 0.87 \times 15 + 0.13 \times 15 = 15$$

پس صدک هفتادو سوم برابر 15 است یعنی 75 درصد داده‌ها حداکثر 15 است.

چارک اول:

$$p = 0.25 \quad \rightarrow \quad (n+1)p = 81 \times 0.25 = 20.25 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r = 20 \\ t = 0.25 \end{cases}$$

$$Q_p = (1-t)x_{(r)} + tx_{(r+1)} = (1-0.25) \times x_{(20)} + 0.25 \times x_{(21)} = 0.75 \times 11 + 0.15 \times 11 = 11$$

پس چارک اول برابر 11 است یعنی 25 درصد داده‌ها حداکثر 11 است.

دهک چهارم:

$$p = 0.4 \quad \rightarrow \quad (n+1)p = 81 \times 0.4 = 32.4 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} r = 32 \\ t = 0.4 \end{cases}$$

$$Q_p = (1-t)x_{(r)} + tx_{(r+1)} = (1-0.4) \times x_{(32)} + 0.4 \times x_{(33)} = 0.6 \times 12 + 0.4 \times 12 = 12$$

پس دهک چهارم برابر 12 است یعنی 40 درصد داده‌ها حداکثر 12 است.

مثال: داده‌های تعداد فرزندان 28 خانواده از شهری را نشان می‌دهد:

3 4 2 3 5 0 3 1 0 3 2 0 1 2 4 1 0 2 3 4 3 0 3 0 1 3 1 0

الف) میانگین، میانه، مد، چارک سوم، صدک یازدهم و دهک ششم را به‌دست آورده و هر کدام از مقادیر را تفسیر کنید. ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید. آیا داده‌ها متقارن هستند یا چوله.

جواب: **داده‌ها گسسته هستند. برای محاسبه‌ی میانگین، میانه، مد، چارک اول، صدک یازدهم و دهک ششم جدول فراوانی داده‌ها را تنظیم می‌کنیم:**

x_i	f_i	$x_i f_i$	g_i
0	7	0	7
1	5	5	12
2	4	8	16
3	8	24	24
4	3	12	27
5	1	5	28
جمع	28	54	

میانگین:

$$\bar{x} = \frac{54}{28} = 1.93$$

به‌طور متوسط هر خانواده 2فرزند دارد.

میانه: **n=28 زوج است پس**

$$m = \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} = \frac{x_{(14)} + x_{(15)}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

50 درصد داده‌ها (14 خانواده) حداکثر 2 فرزند دارند.

مد: **مد برابر 3 است.**

چارک اول:

$$(n+1)\times p = 29\times 0.75 = 21.75 \rightarrow r = 21\ , t = 0.75 \rightarrow$$
$$Q_1 = (1-0.75)\times x_{(21)} + 0.75\times x_{(22)} = 0.25\times 3 + 0.75\times 3 = 3$$

75 درصد خانواده‌ها (7 خانواده) حداکثر 3 فرزند دارند.

صدک یازدهم:

$$(n+1)\times p = 29\times 0.11 = 3.19 \rightarrow r = 3\ , t = 0.19 \rightarrow$$
$$Q_1 = (1-0.19)\times x_{(3)} + 0.19\times x_{(4)} = 0.81\times 0 + 0.19\times 0 = 0$$

11 درصد خانواده‌ها (تقریبا 3 خانواده) فرزندی ندارند.

دهک ششم:

$$(n+1)\times p = 29\times 0.6 = 17.4 \rightarrow r = 17\ , t = 0.4 \rightarrow$$
$$Q_1 = (1-0.4)\times x_{(17)} + 0.6\times x_{(18)} = 0.6\times 3 + 0.4\times 1 = 3$$

60 درصد خانواده‌ها (تقریبا 17 خانواده) حدکثر 3 فرزند دارند.

محاسبه‌ی چندک برای داده‌های پیوسته: ابتدا داده‌ها را طبقه‌بندی کرده و فراوانی هر طبقه را به‌دست می‌آوریم. سپس فراوانی تجمعی هر طبقه را به‌دست آورده و اولین رده‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا برابر np است را به عنوان رده‌ی چندک در نظر می گیریم. سپس مقدار چندک را از فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$Q_p = L_p + \frac{(np - g_{p-1})w}{f_p}$$

L_p: کران پایین طبقه‌ی چندک

g_{p-1}: فراوانی تجمعی طبقه‌ی قبل از طبقه‌ی چندک

f_p: فراوانی طبقه‌ی چندک

w: طول طبقه

مثال: جدول زیر مربوط به نمرات 40 دانشجو می‌باشد. چارک سوم، دهک نهم و صدک 57-ام را بیابید.

فراوانی تجمعی	فراوانی	طبقات

8/5-10/5	12	12
10/5-12/5	8	20
12/5-14/5	5	25
14/5-16/5	6	31
16/5-18/5	9	40

جواب: داده‌ها پیوسته هستند.

$$Q_p = L_p + \frac{(np - g_{p-1})w}{f_p}$$

چارک سوم:

$$p = 0.75 \quad np = 40 \times 0.75 = 30$$

$$Q_p = 14.5 + \frac{(30 - 25)2}{6} = 16.17$$

75 درصد نمرات حداکثر 17/16 است.

دهک نهم:

$$p = 0.9 \quad np = 40 \times 0.9 = 36$$

$$Q_p = 16.5 + \frac{(36 - 31)2}{9} = 17.61$$

90 درصد نمرات حدکثر 17/61 است.

صدک 57-ام:

$$p = 0.57 \quad np = 40 \times 0.57 = 22.8$$

$$Q_p = 12.5 + \frac{(22.8 - 20)2}{5} = 13.62$$

57 درصد نمرات حدکثر 13/62 است.

مثال: جدول زیر مربوط به مدت زمان تسکین درد بعد از مصرف دارو می‌باشد

طبقات	فراوانی
12/73-16/42	4
16/42-20/11	15
20/11-23/8	6
23/8-27/49	8

میانگین، میانه، مد، صدک بیست وچهارم و دهک هشتم را به‌دست آورید و هر کدام از مقادیر را تفسیر کنید.

جواب:

طبقات	فراوانی	x_i	$x_i f_i$	g_i
12/73-16/42	4	14/575	58/3	4
16/42-20/11	15	18/265	273/975	19
20/11-23/8	6	21/955	131/73	25
23/8-27/49	8	25/645	205/16	33
جمع	33		669/165	

میانگین: $\bar{x} = \frac{669.165}{33} = 20.28$ به طور متوسط مدت زمان تکسین درد برای هر نفر20/28 است.

میانه: $m = 16.42 + \frac{(16.5-4)\times 3.69}{15} = 19.495$ مدت زمان تسکین درد نیمی از افراد حداکثر 19/495 است.

مد: $M = 16.42 + \frac{(15-4)\times 3.69}{(15-4)+(15-6))} = 18.45$ مدت زمان تسکین درد اکثر افراد 19/126 است.

صدک بیست وچهارم:

$$n \times p = 33 \times 0.24 = 7.92 \rightarrow \ P_{24} = 16.42 + \frac{(7.92-4)\times 3.69}{15} = 17.38$$

مدت زمان تسکین درد 24 درصد افراد حداکثر 17/38 است.

دهک هشتم:

$$n \times p = 33 \times 0.8 = 26.4 \rightarrow \ D_8 = 23.8 + \frac{(26.4-25)\times 3.69}{8} = 24.14$$

مدت زمان تسکین درد 80 درصد افراد حداکثر 24/14 است.

معیارهای پراکندگی: با وجود این که در بسیاری از موارد، میانگین توصیف نسبتا کاملی از مجموعه داده‌ها ارائه می‌دهد، اما گاهی وجود اطلاعات بیشتر در مورد داده‌ها ضروری است. یک مفهوم مهم در ارتباط با داده‌های آماری، میزان تغییرات آنهاست،بدین معنی که اندازه‌گیریها تا چه اندازه از فردی به فرد دیگر یا شیی به شیی دیگر تغییر می‌کنند. در این بخش، به بررسی و محاسبه میزان تغیرات به عنوان معیارهای پراکندگی خواهیم پرداخت(مقادیری هستند که مشخص می‌کنند داده‌ها چقدر از هم دور و چقدر به هم نزدیک هستند.). مهمترین معیارهای پراکندگی عبارتند از برد، میانگین انحراف ها از میانگین یا از میانه، میان دامنه چارکها، دامنه صدکی، واریانس، انحراف معیار ضریب تغیرات است.

1. **برد**: کوچکترین داده -بزرگترین داده = D

اگرچه دامنه یک وسیله ساده برای اندازه‌گیری اختلاف و پراکندگی در یک سری از داده‌ها است، اما در بیشتر موارد رضایتبخش نیست. داده‌های بسیار بزرگ یا بسیار کوچک مانع از آنند که دامنه، معرف واقعی میزان انحراف باشد. در چنین مواردی، واریانس یک معیار مورد قبول همگان به شمارمی‌رود.

2. **واریانس**: این معیار میزان پراکندگی داده‌ها را اطراف میانگین اندازه‌گیری می‌کند و با S^2 نمایش داده می‌شود. هر چقدر فاصله‌ی داده‌ها از میانگین بیشتر باشد مقدار S^2 بیشتر و منحنی فراوانی پهنتر خواهد بود و هر چقدر فاصله‌ی داده‌ها از میانگین کمتر باشد مقدار S^2 کمتر و منحنی فراوانی کشیده‌تر خواهد بود.

برای محاسبه واریانس مراحل زیر را طی می‌کنیم:

1.. ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم.

2.. در جدول فراوانی ستون $x_i - \bar{x}$ را تشکیل داده در این ستون هر مشاهده را از میانگین کم می‌کنیم.

3.. ستون $(x_i - \bar{x})^2$ را تشکیل می‌دهیم در این ستون مقادیر به دست آمده در مرحله دوم را به توان دو می‌رسانیم.

4.. ستون $(x_i - \bar{x})^2 f_i$ را تشکیل می‌دهیم. در این ستون مقادیر به‌دست آمده در مرحله سوم را در f_i ضرب می‌کنیم.

5.. مقادیر به‌دست آمده در مرحله چهارم را با هم جمع کرده و در نهایت عدد به‌دست آمده را بر تعداد کل داده‌ها تقسیم می‌کنیم.

به طور خلاصه مراحل فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_i$$

تذکر: اگر داده‌ها پیوسته باشند x_i مرکز هر دسته خواهد بود.

3. **انحراف استاندارد**: جذر مثبت واریانس را انحراف استاندارد گویند.

$$S = \sqrt{S^2}$$

با توجه به اینکه در محاسبه واریانس داده‌ها را مربع می‌کنیم، بدین جهت ریشه دوم مثبت آن را که انحراف معیار یا انحراف استاندارد می نامیم، به عنوان یک معیار پراکندگی بر مبنای مقیاس اندازه‌گیری به کار می‌بریم.

4. **ضریب تغییر**: واریانس و انحراف استاندارد معیارهای مناسبی برای تعیین میزان پراکندگی داده‌ها هستند اما به واحد اندازه‌گیری بستگی دارند. لذا برای مقایسه دو سری داده بایستی از شاخصی استفاده کنیم که به واحد اندازه‌گیری بستگی نداشته باشد. این شاخص ضریب تغییر نام دارد و برابر است با

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

نکته: هر چه قدر V بزرگتر باشد نشان می‌دهد که تغییرات داده‌ها در اطراف میانگین بیشتر است.

نکته: اگر داده‌ها را در عدد ثابتی مانند a ضرب کنیم و با مقدار ثابت b جمع کنیم در ضریب تغییر هیچ تغییری ایجاد نخواهد شد.

مثال: داده‌های زیر تعداد تصادفات در یک چهارراه را در مدت 30 روز نشان می‌دهد.

x	6	1	0	5	3
f	4	15	4	6	7

برد، واریانس و انحراف معیار و ضریب تغییر داده‌ها را محاسبه کنید.

جواب: **دامنه**: $6 = 0 - 6 = D$ **داده‌ها گسسته هستند**

x_i	f_i	x_if_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2f_i$
0	4	0	−2.5	6.25	25
1	15	15	−1.5	2.25	33.75
3	7	21	0.5	0.25	1.75
5	6	30	2.5	6.25	37.5
6	4	24	3.5	12.25	49
جمع	36				147

$$\bar{x} = \frac{90}{36} = 2.5$$

$$S^2 = \frac{147}{36} = 4.08$$

$$S = \sqrt{4.08} = 2.01$$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2.01}{2.5} * 100 = 80.4$$

مثال: جدول زیر جدول فراوانی سن افراد شاغل در یک موسسه آموزشی را نشان می‌دهد، برای این جدول برد، واریانس و انحراف استاندارد را به‌دست آورید:

جواب:

طبقات	فراوانی	x_i	$x_i f_i$	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	$(x_i-\overline{x})^2 f_i$
20/5-25/5	13	23	299	-6.6	43.56	566.28
25/5-30/5	25	28	700	-1.6	2.56	64
25/5-35/5	12	33	396	3.4	11.56	138.72
35/5-40/5	10	38	380	8.4	70.56	705.6

$$D = 38-23 = 15 \qquad \overline{x} = \frac{1775}{60} = 29.6$$

$$S^2 = \frac{1474.6}{60} = 24.6 \qquad S = \sqrt{24.6} = 4.9 \qquad CV = \frac{S}{\overline{x}} \times 100 = \frac{4.9}{29.6} * 100 = 16.55$$

مثال: درکارگاه A میانگین مزد روزانه کارگران 20000 و انحراف معیار 1500 و در کارگاه B مزد روزانه کارگران 40000 و انحراف معیار 2000 می‌باشد. مزد علی در کارگاه A، 25000 تومان و مزد احمد در کارگاه B، 35000 تومان است. مزد علی و احمد را با هم مقایسه کنید و مشخص کنید مزد کدامیک بهتر است؟

جواب:

$$A\begin{cases}\overline{x} = 2000\\ S = 1500\end{cases} \qquad CV = \frac{S}{\overline{x}} \times 100 = \frac{1500}{20000} \times 100 = 7.5$$

$$B\begin{cases}\overline{x} = 40000\\ S = 2000\end{cases} \qquad CV = \frac{S}{\overline{x}} \times 100 = \frac{2000}{40000} \times 100 = 5$$

مثال: متوسط ضربان قلب 50 دانشجو 80 با واریانس 16 است. همین دانشجویان به طور متوسط دارای درجه حرارت بدن 37 و واریانس 4 هستند. این دانشجویان از لحاظ ضربان قلب به یکدیگر نزدیکترند یا از لحاظ درجه حرارت بدن.

جواب:

$$\text{ضربان}\begin{cases}\overline{x} = 80\\ S = 4\end{cases} \qquad CV = \frac{S}{\overline{x}} \times 100 = \frac{4}{80} \times 100 = 5$$

$$حرارت\begin{cases}\bar{x} = 37\\ S = 2\end{cases} \qquad CV = \frac{2}{37}\times 100 = 5.41$$

فصل دوم: **نظریه مجموعه‌ها - قوانین شمارش -احتمال**

ابتدا با چند مفهوم اولیه آشنا می‌شویم.

آزمایش تصادفی، آزمایشی است که قبل از انجام دادن آن، نتیجه آزمایش مشخص نیست اما می‌توان حالت های مختلف آن را قبل از ازمایش تعیین کرد.

فضای نمونه: مجموعه تمام حالت‌هایی که از انجام آزمایش تصادفی ممکن است اتفاق بیفتد. فضای نمونه را با S یا Ω نمایش می‌دهیم.

مثلا اگر فرض کنید تاسی را پرتاب می‌کنیم فضای نمونه عبارت خواهد بود با S={1,2,3,4,5,6}.

فضای نمونه براساس موضوع مورد مطالعه می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال1: برای هر از موارد زیر فضای نمونه را تعیین کنید و مشخص کنید کدام گسسته و کدام پیوسته است؟

الف) جنسیت دانشجویان **جواب**: $S = \{$پسر، دختر$\}$ **گسسته**

ب) قد افراد 20 سال به بالا شهری **جواب**: $S = [100, 210]$ **پیوسته**

ج) نظر دانشجویان راجع به امکانات دانشگاه **جواب**: $S = \{$معمولی، خوب، ضعیف$\}$ **گسسته**

د) طول عمر وسایل الکتریکی ساخت یک کارخانه **جواب**: $S = [0, \infty)$ **پیوسته**

ه) نتیجه بازی مسابقه والیبال تیم ملی **جواب**: $S = \{$برد تیم A، برد تیم $B\}$ **گسسته**

و) گروه خونی افراد **جواب**: $S = \{A, AB, B, O\}$ **گسسته**

ز) تعداد دندان‌های پوسیده‌ی یک فرد بالغ **جواب**: $S = \{0, 1, 2, \dots, 32\}$ **گسسته**

پیشامد: هر زیرمجموعه از فضای نمونه را پیشامد گویند و با حروف بزرگ لاتین نمایش داده می‌شود.

رخ دادن پیشامد: اگر نتیجه آزمایش داخل پیشامد قرار گیرد پیشامد مورد نظر رخ داده‌است و اگر نتیجه آزمایش داخل پیشامد قرار نگیرد پیشامد رخ نداده است.

مثال2: تیراندازی دوبار به هدفی شلیک می‌کند. اگر برخورد تیر به هدف را با Y و عدم برخورد را با N نمایش دهیم.مطلوبست:

الف) فضای نمونه را بنویسید.

ب) پیشامد این‌که حداکثر 1 بار به هدف بزنند.

ج) پیشامد این‌که حداقل یک بار به هدف بزنند.

جواب: **الف) ممکن است اولی به هدف بخورد و دومی نخورد (YN)، ممکن است اولی نخورد دومی بخورد (NY)، ممکن است هر دو به هدف بخورد (YY) ممکن است هیچ کدام به هدف نخورد (NN). پس فضای نمونه به صورت**

S={YN,NY,YY,NN}

ب) حداکثر 1 بار یعنی یک بار و کمتر، پس ابتدا پیشامد مورد نظر را می‌نویسیم:

$$A = \{NN, NY, YN\}$$

ج) حداقل یک بار یعنی یک بار و بیشتر پس فضای نمونه عبارتست از

$$B = \{NY, YN, YY\}$$

مثال3: تاسی را یک بار به هوا پرتاب می‌کنیم، مطلوبست

الف) تعیین فضای نمونه ب) پیشامد این که عدد مشاهده شده بزرگتر از 2 باشد. ج) پیشامد این‌که این که عدد مشاهده شده زوج باشد

جواب: الف) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ب) $A = \{3, 4, 5, 6\}$ ج) $B = \{2, 4, 6\}$

مثال 4: خانواده‌ای را به‌طور تصادفی انتخاب کرده‌ایم و فقط می‌دانیم 3 فرزند دارد (دختر: G و پسر: B). مطلوبست

الف) فضای نمونه

$$S = \{BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG\}$$

ب) پیشامد این که حداکثر دو دختر داشته باشد.

$$A = \{GGB, GBG, BGG, BBG, BGB, BBG, BBB\}$$

ج) پیشامد این که دقیقا دو پسر داشته باشد.

$$B = \{BBG, GBB, BGB\}$$

د) پیشامد اینکه هر سه هم‌جنس باشند.

$$C = \{BBB, GGG\}$$

ه) پیشامد این که فرزندان یک درمیان پسر و دختر باشند.

$$D = \{BGB, GBG\}$$

مثال5: تاسی را دوبار پرتاب می‌کنیم. مطلوبست:

الف) تعیین فضای نمونه

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)\\ &(2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)\\ &(3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)\\ &(4,1)(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6)\\ &(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)\\ &(6,1)(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)\} \end{aligned}$$

ب) پیشامد این که شماره تاس اول 5 باشد.

$$S = \{(5,1)(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)\}$$

ج) پیشامد این که مجموع شماره‌های تاس حداکثر 4 باشد.

$$S = \{(1,1)(1,2)(1,3)(2,1)(2,2)(3,1)\}$$

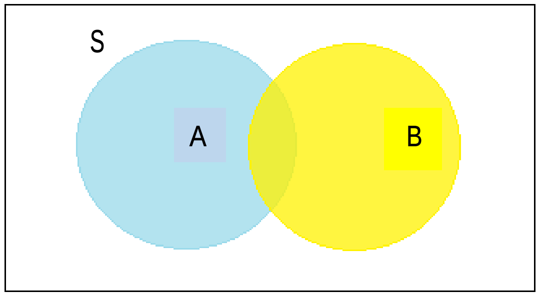
د) پیشامد این که شماره تاس دوم بر 3 بخش‌پذیر باشد.

$$S = \{(1,3)(1,6)(2,3)(2,6)(3,3)(3,6)(4,3)(4,6)(5,3)(5,6)(6,3)(6,6)\}$$

اعمال روی پیشامدها:

اجتماع دو پیشامد $A \cup B$: برای نوشتن اعضای این مجموعه باید تمام اعضای A و B را داخل یک مجموعه نوشت و مقادیر تکراری یک بار نوشته می‌شوند. اگر پیشامد A دایره‌ی سمت چپ و پیشامد B دایره‌ی سمت راست باشد آنگاه $A \cup B$ کل دو دایره‌ی

زیر خواهند بود. توجه کنید در شکل (1) واضح است که A و B نقطه‌ی اشتراک دارند اما این نقاط مشترک فقط یکبار درنظر گرفته می‌شوند.

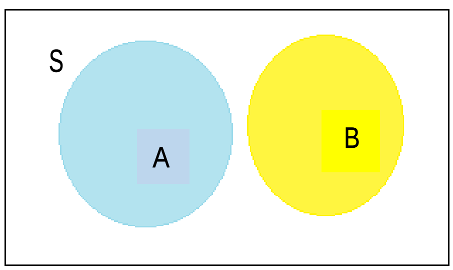


شکل (1)

نکته1: اگر نتیجه آزمایش در قسمت آبی رنگ قرار گیرد پیشامد A رخ می‌دهد ولی B رخ نمی‌دهد. اگر نتیجه‌ی آزمایش در قسمت زرد رنگ قرار گیرد پیشامد B رخ می‌دهد ولی A رخ نمی‌دهد. اگر نتیجه آزمایش در قسمت سبز رنگ قرار گیرد A و B هر دو همزمان رخ می‌دهند. پس به‌طور خلاصه می‌توان گفت پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند.

اشتراک دو پیشامد $A \cap B$: فقط نقاط مشترک دو مجموعه نوشته می‌شود (فقط یک بار). در شکل (1) قسمت سبز رنگ $A \cap B$ است. لذا پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که تنیجه آزمایش در قسمت سبز رنگ باشد یعنی هر دو همزمان رخ دهند.

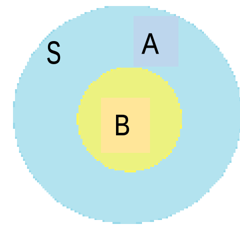
نکته2: در صورتی که A و B به صورت زیر باشند آنگاه A و B هیچ گاه همزمان رخ نخواهند داد.



شکل (2)

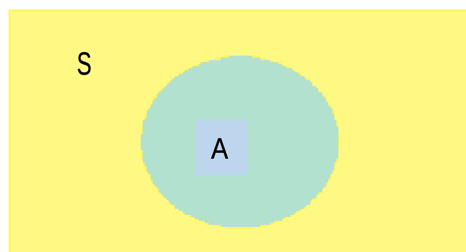
نکته3: اگر $B \subseteq A$ به این معنی است که پیشامد B زیرمجموعه‌ی A است و در شکل (3) نشان داده شده است. در این صورت

$$A \cap B = B \text{ و } A \cup B = A$$



شکل (3)

متمم یک پیشامد A': برای نوشتن اعضای این پیشامد باید از روی فضای نمونه S مجموعه‌ی A را برداریم. اعضای باقیمانده، متمم پیشامد A به‌دست می‌آید. در شکل (4) متمم پیشامد A قسمت زرد رنگ است. زمانی A' اتفاق می‌افتد که نتیجه آزمایش در قسمت زرد رنگ باشد یعنی پیشامد A رخ ندهد.



شکل (4)

تفاضل دو پیشامد $A - B$: برای نوشتن اعضای این مجموعه باید از روی پیشامد A اعضای پیشامد B را برمی‌داریم، به عبارت دیگر اعضای مشترک A و B را از روی مجموعه‌ی A برمیداریم اعضای باقیمانده برابر است با $A - B$، به صورت ریاضی یعنی:

$$A - B = A - A \cap B$$

توجه کنید در شکل (1) دایره‌ی سمت چپ پیشامد A است ولی $A - B$ فقط قسمت آبی رنگ خواهد بود و زمانی این پیشامد رخ می‌دهد که نتیجه‌ی آزمایش در قسمت آبی رنگ باشد. بنابرین می‌توان این طور تفسیر کرد که $\boldsymbol{A - B}$ زمانی رخ می‌دهد که فقط A اتفاق بیفتد. به همین ترتیب $B - A$ به این معنی است که فقط پیشامد B رخ دهد و در شکل (1) قسمت زرد رنگ است، یعنی $B - A = B - A \cap B$.

نکته4: اگر دو پیشامد نقطه مشترکی نداشته باشند (شکل 2) آنگاه پیشامد $A - B$ همان A و پیشامد $B - A$ همان B خواهد بود.

تفاضل متقارن دو پیشامد $A\Delta B$: برای نوشتن اعضای این پیشامد باید یکی از دو روش زیر را استفاده کرد:

الف) از روی پیشامد $A \cup B$ مقادیر مشترک را بر می‌داریم:

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

ب) اجتماع دو پیشامد $A - B$ و $B - A$ را در نظر می‌گیریم:

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

معنی این پیشامد این است که فقط یکی از دو پیشامد رخ دهد. در شکل (1) $A\Delta B$ هم قسمت زرد رنگ است، هم قسمت آبی رنگ، ولی شامل قسمت سبز رنگ نمی‌شود.

پیشامدهای ناسازگار: دو پشامد A و B را ناسازگار گویند اگر اشتراک نداشته باشند. بنابراین دو پیشامد ناسازگار هیچ‌گاه همزمان رخ نمی‌دهند.(شکل2)

مثال6: فرض کنید فضای نمونه به صورت

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,910,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$،

A پیشامد عدد زوج، B پیشامد عدد فرد، C پیشامد عدد کمتر از 10، D پیشامد مضرب 3 باشند. مطلوبست:

الف اعضای پیشامد A، B، C و D را بنویسید:

ب) اعضای پیشامدهای زیر را تعیین کنید.

$$A \cap C \quad B \cup C \quad D' \quad A - B \quad C - D \quad A\Delta D$$

جواب: **الف)**

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}} \\
\boldsymbol{B = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}} \\
\boldsymbol{C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}} \\
\boldsymbol{D = \{3,6,9,12,15,18\}}
\end{gathered}$$

ب)

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{A \cap C = \{2,4,6,8\}} \\
\boldsymbol{B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}} \\
\boldsymbol{D' = S - D = \{1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,16,17,19,20\}} \\
\boldsymbol{A - B = A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}} \\
\boldsymbol{C - D = \{1,2,4,5,7,8\}} \\
\boldsymbol{A\Delta D = (A \cup D) - (A \cap D)}
\end{gathered}$$

$$\boldsymbol{A \cup D = \{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}} \qquad \boldsymbol{A \cap D = \{6,12,18\}}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \boldsymbol{A\Delta D} &\boldsymbol{= \{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\} - \{6,12,18\}} \\
&\boldsymbol{= \{2,3,4,8,9,10,14,15,16,20\}}
\end{aligned}$$

تمرین1: فرض کنید تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. A پیشامد مشاهده‌ی عدد 6 در پرتاب اول، B پیشامد جمع اعداد برابر 7، پیشامد C مشاهده عدد زوج در هر دو پرتاب باشند. مطلوبست

الف اعضای پیشامد A، B، C را بنویسید.

ب) اعضای پیشامدهای زیر را تعیین کنید.

$$A \cap C \quad B \cup C \quad C' \quad B - A \quad B\Delta C$$

ج) کدام‌یک از رو پیشامد A، B و C ناسازگارند.

تمرین2: ابتدا یک تاس را پرتاب کرده و سپس دوبار سکه را پرتاب می‌کنیم مطلوبست تعیین:

الف) فضای نمونه

ب) پیشامد این‌که در این آزمایش حداقل یک بار شیر مشاهده شود (A)

ج) پیشامد این‌که در این آزمایش عدد مشاهده شده بر 3 بخش‌پذیرباشد(B)

د) پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

$$A \cup B \quad A \cap B \quad B' \quad B - A \quad A\Delta B$$

قوانین شمارش: بعضی مواقع لازم نیست اعضای فضای نمونه یا اعضای پیشامدها را بنویسیم فقط کافی است تعداد آن‌ها را مشخص کنیم. د رادامه با تعدادی از قوانین شمارش آشنا می‌شوید.

1. اصل جمع: فرض کنید یک کار را بتوان با دو عمل A یا B انجام داد، اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام پذیرند. آنگاه این کار به m+n طریق انجام پذیر است.

2. اصل ضرب: فرض کنید یک کار را بتوان با دو عمل A و B انجام داد، اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام پذیرند. آنگاه این کار به m×n طریق انجام پذیر است.

3. جایگشت: اگر n شیئ متمایز داشته باشیم می‌توانیم این اشیاء را می‌توان به صورت های مختلف کنار یکدیگر قرار دهیم. هر آرایش این اشیاء را یک جایگشت گوییم و مقدار آن برابر:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

نکته5: اگر از بین n شیئ متمایز بخواهیم r شیئ را کنار همدیگر قرار دهیم آنگاه:

الف) ترتیب: اگر تکرار اشیاء مجاز نباشد، تعداد حالات برابر است با: $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ (ترتیب)

ب) اگر تکرار اشیاء مجاز باشد، تعداد حالات برابر است با: n^r

نکته6: اگر n شیء که n_1 تا از نوع اول، n_2 تا از نوع دوم و ...... n_k از نوع k-ام باشند به طوریکه $n_1 + n_2 + \cdots n_k = n$ آنگاه

راب خواهیم کنار هم قرار دهیم تعداد حالات ممکن است برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

4. **ترکیب**: از بین n شیئ متمایز می‌خواهیم r شیء را انتخاب کنیم به طوریکه ترتیب انتخاب مهم نیست آنگاه تعداد حالات برابر است با:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

مثال7: به چند طریق می‌توان از بین 4 دانشجوی حسابداری و 5 دانشجوی مدیریت، یک دانشجو انتخاب کرد.

جواب:

یک دانشجوی مدیریت یا یک دانشجوی حسابداری $= 4 + 5 = 9$

مثال8: گروهی شامل 5 مرد و 4 زن است. به چند طریق می‌توان دو نماینده شامل یک مرد و یک زن انتخاب کرد.

جواب:

یک زن و یک مرد $= 5 \times 4 = 20$

مثال9: با راقام 1 2 3 4 چند عدد 3 رقمی می‌توان ساخت به طوریکه:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. **جواب**: $-?-?- = \frac{4}{-} \times \frac{4}{-} \times \frac{4}{-} = 64$

ب) تکرار ارقام محاز نباشد. **جواب**: $-?-?- = \frac{4}{-} \times \frac{3}{-} \times \frac{2}{-} = 24$

ج) عدد زوج باشد و تکرار ارقام مجاز نباشد. **جواب**: $-?-?- = \frac{3}{-} \times \frac{1}{-} \times \frac{2}{\text{عدد 2 یا 4}} = 6$

ج) عدد فرد باشد و تکرار ارقام مجاز باشد. **جواب**: $-?-?- = \frac{4}{-} \times \frac{4}{-} \times \frac{2}{\text{عدد 1 یا 3}} = 32$

مثال10: می‌خواهیم از بین 4 لیسانس حسابداری، 3 لیسانس مدیریت و 5 لیسانس اقتصاد یک گروه دو نفری تشکیل دهیم به طوریکه تخصص‌های مختلف در آن باشند، به چند طریق این عمل امکانپذیر است.

جواب:

(حسابداری یا مدیریت) یا (اقتصاد یا مدیریت) یا (حسابداری یا اقتصاد) $= (3 \times 4) + (3 \times 5) + (5 \times 4) = 47$

مثال11: به چه طریق می‌توان 2 دانشجوی حسابداری، 4 دانشجوی ریاضی و 3 دانشجوی مدیریت را کنار یکدیگر قرار داد به طوریکه: الف) هیچ شرطی برای قرار گرفتن دانشجویان نباشد.

جواب: $9!$

ب) دانشجویان هم رشته کنار هم باشند. **جواب:**

رياضي | حسابداري | مديريت

$$3! \times 3! \times 2! \times 4!$$

ج) دانشجویان مدیریت کنار هم باشند. **جواب:** $3! \times 7!$

د) دانشجویان حسابداری و مدیریت یک در میان کنار هم باشند. **جواب:** $5! \times 2! \times 3!$

مثال12: می‌خواهیم از بین 15 شرکت کننده در یک جلسه، 3 نفر را به ترتیب اننتخاب کنیم. به طوریکه نفر اول به عنوان رئیس، نفر دوم به عنوان معاون و نفر سوم به عنوان سخنگو باشد. به چند طریق این کار امکان دارد.

جواب:

$$P_3^{15} = \frac{15!}{(15-3)!} = 15 \times 14 \times 13$$

مثال13: باحروف کلمه COMPUTER چند کلمه

الف) 8 حرفی بدون تکرار می‌توان ساخت **جواب:** $8!$

ب) 5 حرفی بدون تکرار می‌توان ساخت **جواب:** $P_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

ج) 5 کلمه با تکرار حرف می‌توان ساخت **جواب:** 8^5

مثال14: با حروف کلمه فردوسی چند کلمه سه حرفی می‌توان ساخت به طوریکه:

الف) تکرار حروف مجاز باشد **جواب:** 6^3

ب) تکرار حروف مجاز نباشد **جواب:**

$$P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \times 5 \times 3 = 90$$

ج) تکرار حروف مجاز نباشد و حرف اول نقطه دار باشد. **جواب:**

$$\frac{2}{-} \times \frac{5}{-} \times \frac{4}{-} = 40$$

د) تکرار حروف مجاز نباشد و حرف آخر نقطه دار باشد. **جواب:**

$$\frac{5}{-} \times \frac{4}{-} \times \frac{1}{-} = 20$$

ه) تکرار حروف مجاز نباشد و حرف وسط "س" باشد.

$$\frac{5}{-} \times \frac{1}{-} \times \frac{4}{-} = 20$$

مثال15: با حروف کلمه *STATISTICS* چند کلمه ده حرفی می‌توان ساخت؟

جواب:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} = \frac{10!}{3! \times 3! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 50400$$

مثال16: در مثال قبلی چند کلمه 10 حرفی می‌توان ساخت به طوریکه دو حرف *I* همواره کنار هم باشند.

جواب:

$$\frac{9!}{3! \times 3!} =$$

چند کلمه 10 حرفی می‌توان ساخت به طوریکه با حرف *S* شروع و خاتمه یابد.

جواب:

$$\frac{8!}{3! \times 2!} =$$

مثال17: می‌خواهیم 3 کتاب ریاضی عمومی1، 5 کتاب آمار 1 و 4 کتاب حسابداری را در یک قفسه کنار هم قرار دهیم به چند طریق این کار امکان‌پذیر است.

جواب:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} = \frac{12!}{3! \times 5! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3 \times 2 \times 1 \times 5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 27720$$

مثال18: قرار است از بین 10 مشتری یک شرکت، 3 مشتری را انتخاب کنیم و نظر آنها را راجع به کیفیت محصولات تولیدی جویا شویم. به چند طریق می‌توان این 3 مشتری را انتخاب کرد؟

جواب:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

مثال19: می‌خواهیم از بین 7 سرکارگر مونتاژ، 4 سرکارگر دسته‌بندی، گروهی انتخاب کنیم که شامل 4 سرکارگر مونتاژ و 2 سرکارگر دسته بندی انتخاب کنیم. به چند طرق این کار امکان پذیر است.

جواب:

4 سرکارگر مونتاژ و 2 سرکارگر دسته بندی $= \binom{7}{4} \times \binom{4}{2} = \frac{7!}{4! \times 3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1} = 35 \times 6 = 210$$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین 7 مرد و 12 زن یک گروه 5 نفری تشکیل داد به طوریکه:

الف) این گروه فقط شامل مردان باشد.

$$\binom{7}{5} = 21$$

ب) این گروه فقط شامل زنان باشد.

$$\binom{12}{5} = 792$$

ج) این گروه شامل 3 مرد و 2 زن باشد.

$$\binom{7}{3} \times \binom{12}{2} = 35 \times 66 = 2310$$

د) این گروه شامل حداقل 3 زن باشد.

3 زن یا 4 زن یا 5 زن $= \binom{12}{3} \times \binom{7}{2} + \binom{12}{4} \times \binom{7}{1} + \binom{12}{5} = 220 \times 21 + 495 \times 7 + 792$

$$= 8877$$

مثال14: با ارقام 0 1 2 3 4 5 چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت به طوریکه:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد.

$$\frac{5}{\ } \times \frac{6}{\ } \times \frac{6}{\ } \times \frac{6}{\ } = 1080$$

ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

$$\frac{5}{\ } \times \frac{5}{\ } \times \frac{4}{\ } \times \frac{3}{\ } = 300$$

ج) عدد فرد و تکرار ارقام مجاز نباشد.

$$\frac{4}{\ } \times \frac{4}{\ } \times \frac{3}{\ } \times \frac{3}{1 \text{ یا } 3 \text{ یا } 5} = 144$$

د) عدد زوج و تکرار ارقام مجاز نباشد.

$$\frac{5}{\ } \times \frac{4}{\ } \times \frac{3}{\ } \times \frac{1}{0} = 60$$

$$\frac{4}{\ } \times \frac{4}{\ } \times \frac{3}{\ } \times \frac{2}{2 \text{ یا } 4} = 96$$

$$96 + 60 = 156$$

مثال 15: پلاک اتومبیل ها از 5 شماره غیر صفر و یک حرف تشکیل شده است تعداد اتومبیل هایی که می‌توان شماره کرد را تعیین کنید.

$$\frac{9}{\ } \times \frac{9}{\ } \times \frac{32}{\ } \times \frac{9}{\ } \times \frac{9}{\ } \times \frac{9}{\ } = 1889568$$

احتمال: بیشتر مردم بدون اطلاع از علم احتمالات در گفتگوی روزانه اصطلاحات و عباراتی مانند اغلب، شاید، احتمال دارد را به کار می‌برند. به عنوان مثال می گوییم "احتمال دارد فردا دوستم را ملاقات کنم"، " شاید فردا به مسافرت بروم"، "اغلب روزهای زمستان هوا ابری است"، " محمد احتمالا در بازی شطرنج پیروز می‌شود". ما می‌خواهیم این جملات را به صورت عددی بیان کنیم. مثلا فرض کنید می‌خواهیم پیش‌بینی کنیم که یک تیم فوتبال مسابقه‌ی آینده‌ی خود را می‌برد یا می‌بازد. برای پیش‌بینی عددی، 30 مسابقه‌ی قبلی این تیم را بررسی می‌کنیم اگر این تیم 16 بار برده، 5 بار مساوی کرده و 9 بار بازنده شده باشد. بنابراین می‌توان گفت این تیم مسابقه بعدی خود را با احتمال 0/53 ($\frac{16}{30} = 0.53$) می‌برد، با احتمال 0/17($\frac{5}{30} = 0.17$) مساوی می‌کند و با احتمال 0/3 ($\frac{9}{30} = 0.3$) می‌بازد.

احتمال تابعی از فضای نمونه به داخل $[0,1]$ که در سه اصل زیر صدق می کند:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$
3. اگر $A_1, A_2, \ldots$ پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند آنگاه

$$P(A_1 + A_2 + \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

مدل احتمال روی فضای نمونه متناهی:

فرض فضای نمونه به صورت $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ باشد. اگر به هر یک از اعضای فضای نمونه وزن های $p_1, p_2, \ldots, p_n$ نسبت دهیم به طوریکه

$$0 \leq p_1 \leq 1 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} p_1 = 1$$

در این صورت به آن مدل احتمال گویند و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

Ω	e_1	e_2	......	e_n
P	p_1	p_2	......	p_n

و در این صورت اگر پیشامد A به صورت زیرباشد

$$A = \{e_{r1}, e_{r2}, \ldots, e_{rn}\}$$

آنگاه احتمال آن برابر است با

$$P(A) = p_{r1} + p_{r2} + \cdots + p_{rn}$$

مثال20: با استفاده از سرشماری، نتایج زیر در مورد تعداد فرزندان خانواده ها مشخص شده است:

5 و بیشتر	4	3	2	1	0	تعداد فرزندان
0/1	0/15	0/25	0/35	0/1	0/05	احتمال

خانواده ای به طور تصادفی انتخاب می کنیم، مطلوبست احتمال اینکه

الف) حداکثر 2 فرزند داشته باشد.

$$0.05 + 0.1 + 0.35 = 0.5$$

ب) 2 تا 4 فرزند داشته باشد.

$$0.35 + 0.25 + 0.15 = 0.75$$

ج) بیشتر از 4 فرزند داشته باشد.

$$0.1$$

مثال: جدول زیر فراوانی تصادفات در یم جهارراه را در مدت 50 روز نشان می‌دهد

8	12	15	10	5	تعداد روزها
5 یا بیشتر	4	3	2	0 یا 1	تعداد تصادفات

احتمال این که در یک روز خاص

الف) حداقل 3 تصادف رخ دهد.

ب) فقط 4 تصادف رخ دهد.

ج) کمتر از 3 تصادف رخ دهد.

5	4	3	2	1	تعداد تصادفات
$\frac{8}{50} = 0.16$	$\frac{12}{50} = 0.24$	$\frac{15}{50} = 0.3$	$\frac{10}{50} = 0.2$	$\frac{5}{50} = 0.1$	**احتمال**

$$0.3 + 0.24 + 0.16 = 0.7$$

$$0.24$$

$$0.1 + 0.2 = 0.3$$

مثال: یک تاس به گونه ای طراحی شده است که احتمال مشاهده عد زوج دو برابر عدد فرد است. احتمال اینکه عدد مشاهده شده بزرگتر یا مساوی 3 باشد را بیابید.

این تاس به دلیل ناسالم بودن، احتمالات یکسان برای هر عدد ندارد لذا باید احتمال عدد را محاسبه کنیم.

$$P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) \propto w$$
$$P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) \propto 2 \times w$$

همیشه جمع روی کل فضا برابر یک است پس:

$$w + 2w + w + 2w + w + 2w = 1 \rightarrow 9w = 1 \rightarrow w = \frac{1}{9}$$

$$P(\{1\}) = \frac{1}{9} \quad P(\{2\}) = \frac{2}{9} \quad P(\{3\}) = \frac{1}{9}$$
$$P(\{4\}) = \frac{2}{9} \quad P(\{5\}) = \frac{1}{9} \quad P(\{6\}) = \frac{2}{9}$$

$$P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

مثال: تاسی ناسالم بوده به طوری که احتمال آمدن هر شماره‌ای متناسب با عدد مشاهده شده است. فرض کنید A پیشامد عدد زوج، B پیشامد عدد اول و C پیشامد عدد بخش‌پذیر بر 3 باشد. مطلوبست:

الف.. احتمال مشاهده هر عدد را بیابید. **این تاس به دلیل ناسالم بودن، احتمالات یکسان برای هر عدد ندارد لذا باید احتمال عدد را محاسبه کنیم.**

$$P(\{1\}) \propto 1 \rightarrow P(\{1\}) = w$$
$$P(\{2\}) \propto 2 \rightarrow P(\{2\}) = 2w$$
$$P(\{3\}) \propto 3 \rightarrow P(\{3\}) = 3w$$
$$P(4) \propto 4 \rightarrow P(\{4\}) = 4w$$
$$P(\{5\}) \propto 5 \rightarrow P(\{5\}) = 5w$$
$$P(\{6\}) \propto 6 \rightarrow P(\{6\}) = 6w$$

همیشه جمع روی کل فضا برابر یک است پس:

$$w + 2w + 3w + 4w + 5w + 6w = 1 \rightarrow 21w = 1 \rightarrow w = \frac{1}{21}$$

$$P(\{1\}) = \frac{1}{21} \quad P(\{2\}) = \frac{2}{21} \quad P(\{3\}) = \frac{3}{21}$$
$$P(\{4\}) = \frac{4}{21} \quad P(\{5\}) = \frac{5}{21} \quad P(\{5\}) = \frac{6}{21}$$

ب.. احتمال هر پیشامدرا بیابید.

$$P(A) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}$$
$$P(B) = \frac{2}{21} + \frac{3}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}$$
$$P(C) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{9}{21}$$

مدل احتمال یکنواخت: اگر هر یک از اعضای فضای نمونه $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ دارای احتمالات یکسان باشند یعنی

Ω	e_1	e_2	……	e_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	……	$\frac{1}{n}$

آنگاه این مدل را مدل احتمال یکنواخت گویند و احتمال رخ دادن یک پیشامد در این مدل برابر است با

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضای پیشامد } A}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه}}$$

مثال13: در یک کلاس 6 پسر و 14 دختر حضور دارند. از بین این افراد به طور کاملا تصادفی یک نفر را انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال این‌که الف) فرد انتخابی دختر باشد. ب) فرد انتخابی پسر باشد.

جواب:

الف) $\frac{14}{20} = 0.7$ ب) $\frac{6}{20} = 0.3$

مثال14: در یک کیسه 5 مهره سفید، 12 مهره سیاه و 9 مهره سبز وجود دارد. از درون این کیسه یک مهره به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال این‌که الف) مهره‌ی انتخابی سبز باشد. ب) مهره‌ی انتخابی سفید باشد. ج) مهره‌ی انتخابی سیاه باشد.

الف) $\frac{9}{26} = 0.35$ ب) $\frac{5}{26} = 0.19$ ج) $\frac{12}{26} = 0.46$

مثال: در ظرفی محتوی 5 گوی قرمز، 4 گوی سفید و 3 گوی سیاه، دو گوی همزمان خارج می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه یکی سیاه و یکی قرمز باشد .

ب) احتمال اینکه هر دو همرنگ باشند.

الف) $\frac{\binom{3}{1} \times \binom{5}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{15}{\frac{12!}{2! \times 10!}} = \frac{15}{\frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 1 \times 10!}} = \frac{15}{66} = 0.23$

ب) $\frac{\binom{3}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{3!}{2!\,1!} + \frac{5!}{2!\,3!} + \frac{4!}{2!\,2!}}{66} = \frac{19}{66} = 0.29$

مثال15: فرض کنید سکه ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. مطلوبست:

الف) احتمال اینکه دو خط مشاهده شود.

ب) احتمال اینکه دقیقا یک شیر مشاهده شود.

ج) احتمال اینکه هر سه پرتاب مثل هم باشند.

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

الف) $\frac{3}{8}$ ب) $\frac{3}{8}$ ج) $\frac{2}{8}$

مثال16: 4 زوج برای یک تئاتر 8 بلیط خریداری کرده اند، مطلوبست:

الف) احتمال اینکه زوج ها کنار هم بنشینند.

ب) احتمال این که مردها کنار هم، زن ها کنار هم بنشینند.

زوج اول

زوج دوم

زوج سوم

زوج چهارم

$$\frac{4!\,2!\,2!\,2!\,2!}{8!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 0.0095$$

مردها

زن ها

$$\frac{2!\,4!\,4!}{8!} = 0.029$$

تمرین 12:سه شیرازی، دو تهرانی و چهار اصفهانی می‌خواهند در یک صف کنار هم قرار گیرند.

الف) احتمال اینکه دو تهرانی در دو سر صف باشند.

ب) احتمال اینکه همشهری ها کنار هم باشند.

ج) احتمال اینکه شیرازی ها و اصفهانی ها یک درمیان کنار هم باشند.

تهراني

اصفهاني و شيرازي

تهراني

$$\frac{2!\,7!}{9!} = 0.25$$

تهراني

اصفهاني

شيرازي

$$\frac{3!\,2!\,4!}{9!} = 0.0079$$

$$\frac{3!\,3!\,4!}{9!} = 0.0024$$

مدل احتمال روی فضای نمونه پیوسته: مقدار احتمال برای حالت پیوسته(به عنوان مثال: قد، وزن، معدل، میزان اضطراب) به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(A) = \frac{A \text{ طول فاصله}}{S \text{ طول فاصله}} \left(or \ \frac{A \text{ مساحت ناحیه}}{S \text{ مساحت ناحیه}}\right)$$

مثال17: یک مطالعه‌ی گسترده‌ای در زمینه‌ی میزان شادی افراد در یک شهر بزرگ صورت گرفته است و مشخص شده است که میزان شادی افراد عددی است بین 80 تا 210. فردی را به طور تصادفی از افراد شهر انتخاب می‌کنیم. مطلوبست

الف) احتمال این‌که میزان شادی این فرد بین 95 تا 115 باشد.

$$\frac{115-95}{210-80} = 0.15$$

ب) احتمال این‌که میزان شادی این فرد حداکثر 180 باشد.

$$\frac{180-80}{130} = \frac{100}{130} = 0.77$$

ج) احتمال این‌که میزان شادی این فرد حداقل 160 باشد.

$$\frac{210-160}{130} = 0.38$$

نکته7: **توجه کنید در حالت پیوسته احتمال در یک نقطه خاص همواره برابر صفر است .**

د) احتمال این‌که میزان شادی این فرد دقیقا 160 باشد.

$$\frac{0}{130} = 0$$

قوانین احتمال:

1.احتمال تهی همیشه صفر است. $P(\phi) = 0$

2.احتمال این که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهند از فرمول روبرو محاسبه می‌شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3.احتمال متمم یک پیشامد از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید: $P(A') = 1 - P(A)$

4.احتمال تفاصل دو پیشامد به صورت

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$$

4. احتمال تفاضل متقارن از

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$

یا

$$P(A \Delta B) = P(A - B) + P(B - A)$$

یا

$$.P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2 \times P(A \cap B)$$

تمرین 14: الف) در حالت خاص اگر در حالت خاص اگر اگر A و B ناسازگار باشند مقدار $P(A \Delta B)$ را به‌دست آورید. ب) در حالت خاص اگر $B \subseteq A$ مقدار $P(A \Delta B)$ را به‌دست آورید.

در ادامه مثال‌هایی برای کاربرد این قوانین احتمال می‌زنیم.

مثال18: جدول زیر اضطراب و تحصیلات 135 نفر مورد بررسی شده است فردی را به طور تصادفی انتخاب می کنیم.مطلوبست احتمال اینکه

اضطراب مدرک تحصیلی	کم	متوسط	زیاد
دیپلم	5	3	25
لیسانس	7	9	30
فوق‌لیسانس	11	8	2
دکتری	12	5	18

الف) فوق لیسانس باشد.

$$\frac{21}{135}$$

ب) میزان اضطراب این فرد کم باشد.

$$\frac{35}{135}$$

ج) هم لیسانس باشد هم اضطراب زیاد داشته باشد.

$$\frac{30}{135}$$

د) دکتری نباشد.

$$1-\frac{35}{135}=\frac{100}{135}$$

ه) دیپلم باشد یا میزان اضطرابش زیاد باشد.

$$\frac{33}{135}+\frac{75}{135}-\frac{25}{135}$$

و) فقط فوق لیسانس باشد یا فقط اضطراب متوسط داشته باشد.

$$\frac{21}{135}+\frac{25}{135}-2\times\frac{8}{135}=\frac{30}{135}$$

مثال: احتمال اینکه هواپیمای جدید تایید طراحی را به دست آورد 0/16، احتمال اینکه تایید کارایی را به دست آورد 0/24 و احتمال اینکه تایید هر دو را کسب کند 0/1 است. اگر هواپیمایی به تازگی تولید شده باشد چقدر احتمال دارد.

$$A: \text{تاییدیه طراحی} \rightarrow P(A)=0.16$$

$$B: \text{تاییدیه کارایی} \rightarrow P(B)=0.24$$

$$A\cap B: \text{هردو تاییدیه}\ \varphi \rightarrow P(A\cap B)=0.1$$

الف) حداقل یکی از دو تاییدیه را کسب کند.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.16+0.24-0.1=0.3$$

ب) فقط تاییدیه طراحی را کسب کند.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.16-0.1=0.06$$

ج) هیچ کدام از دو تاییدیه را کسب نکند.

$$A'\cap B'=(A\cup B)'$$

$$P(A'\cap B')=P[(A\cup B)']=1-P(A\cup B)=1-0.3=0.7$$

مثال: دانشگاهی در یکی از استان‌ها واقع شده است. $\frac{1}{3}$ دانشجویان آن دانشگاه خارج از خوابگاه دانشجویی زندگی می‌کنند. $\frac{5}{9}$ دانشجویان اهل آن استان هستند. و $\frac{3}{4}$ دانشجویان یا اهل آن استان نیستند یا در خوابگاه دانشجویی زندگی می‌کنند. احتمال اینکه دانشج.یی که صورت تصادفی از این دانشاه انتخاب شده اهل آن استان نباشد و در خوابگاه زندگی کند چقدر است.

مثال. فردی در آگهی استخدام دو شرکت ثبت نام کرده است. او حدس می‌زند احتمال این که در شرکت A پذیرفته شود 0/7 و احتمال این‌که در شرکت B پذیرفته شود 0/4 است و احتمال این‌که در هر دو پذیرفته شود 0/25 است. چقدر احتمال دارد که این شخص حداقل در یکی از این دو شرکت پذیرفته شود؟

$$\boldsymbol{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.25 = 0.85}$$

احتمال شرطی: در این قسمت می‌خواهیم احتمال پیشامدی مانند Bرا بیابیم در صورتی که میدانیم پیشامد A اتفاق افتاده است.

تعریف3: اگر A و B دو پیشامد باشند و با این شرط که بدانیم پیشامد A رخ داده است، احتمال پیشامد B به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad ; P(A) \neq 0$$

مثال: در مثال مربوط به میزان اضطراب، اگر فرد انتخابی دارای مدرک لیسانس باشد چقدر احتمال دارد که میزان اضطراب آن متوسط باشد.

از دانشجویان سال اول دانشکده ای 25 درصد از درس ریاضی، 15 درصد از درس فیزیک و 10 درصد از هر دو درس مردود شده اند. دانشجویی را به تصادف انتخاب می‌کنیم، مطلوبست احتمال این که:

A: **مردود در درس ریاضی**

B: **مردود در درس فیزیک**

$\boldsymbol{A\cap B}$: **مردود در هر دو درس**

الف) اگر از درس فیزیک مردود شده است از درس ریاضی نیز مردود شده باشد.

$$\boldsymbol{P(A\,|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.15} = 0.67}$$

ب) اگر از درس ریاضی مردود شده است، از درس فیزیک نیز مردود شده باشد.

$$\boldsymbol{P(B\,|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4}$$

مثال: از جعبه‌ای محتوی 9 کارت به شماره های 1 تا 9، 2 کارت به تصادف **همزمان** انتخاب میکنیم. اگر بدانیم مجموع دو کارت زوج است چقدر احتمال دارد که هر دو عدد فرد باشند.

$$\boldsymbol{S = \{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)(1,7)(1,8)(1,9)}$$

$$(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)(2,7)(2,8)(2,9)$$

$$(3,4)(3,5)(3,6)(3,7)(3,8)(3,9)$$

$$(4,5)(4,6)(4,7)(4,8)(4,9)$$

$$(5,6)(5,7)(5,8)(5,9)$$

$$(6,7)(6,8)(6,9)$$

$$(7,8)(7,9)$$

$$(8,9)\}$$

$$A=\{(1,3)(1,5)(1,7)(1,9)$$

$$(2,4)(2,6)(2,8)$$

$$(3,5)(3,7)(3,9)$$

$$(4,6)(4,8)$$

$$(5,7)(5,9)$$

$$(6,8)$$

$$(7,9)\}$$

$$B=\{(1,3)(1,5)(1,7)(1,9)$$

$$(3,5)(3,7)(3,9)$$

$$(5,7)(5,9)$$

$$(7,9)\}$$

$$A\cap B=\{(1,3)(1,5)(1,7)(1,9)$$

$$(3,5)(3,7)(3,9)$$

$$(5,7)(5,9)$$

$$(7,9)\}$$

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{10}{36}}{\frac{16}{36}}=\frac{0.28}{0.44}=0.64$$

جدول زیر تعداد دانشجویان سال اول دو رشته حسابداری و مدیریت را بر حسب جنسیت نشان می‌دهد:

رشته / جنسیت	دختر	پسر	جمع
حسابداری	65	35	100
مدیریت	40	60	100
جمع	105	95	

یک دانشجو به طور تصادفی از بین این دانشجویان انتخاب می کنیم. مطلوبست:

الف) چقدر احتمال دارد که دختر باشد $\frac{105}{200}$

ب) چقدر احتمال دارد که پسر و در رسته مدیریت باشد. $\frac{60}{200}$

ج) اگر این دانشجو را از بین دانشجویان مدیریت انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد دختر باشد. $\frac{40}{100}$

د) اگر این دانشجو را از بین پسران انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد در رشته حسابداری تحصیل کند. $\frac{35}{95}$

قانون ضرب احتمال: اگر A و Bدو پیشامد باشند که بتوانند هزمان رخ دهند آنگاه

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A); \qquad P(A) \neq 0$$

مثال: جعبه ای شامل 3 مهره سفید، 4 مهره سیاه و 2 مهره قرمز است. اگر از این جعبه 2 مهره به تصادف یکی یکی و بدون جایگذاری خارج کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

الف) مهره انتخابی اول سفید و دومی سیاه باشد.

$$\frac{3}{9} \times \frac{4}{8} = 0.17$$

ب) هر دو مهره همرنگ باشند.

$$\text{هردو سفید} \quad \text{یا} \quad \text{هردو سیاه} \quad \text{یا} \quad \text{هردو قرمز} = \frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{8} = 0.28$$

پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم در صورتی که وقوع یا عدم وقوع یکی بر وقوع یا عدم وقوع دیگری اثر گذار نباشد. مانند میزان قد و سطح تحصیلات

از نظر ریاضی دو پیشامد A و B را مستقل گوییم هرگاه

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال: ابتدا یک سکه وسپس تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده شیر و B پیشامد مشاهده عدد زوج باشد آیا A و B مستقل هستند.

مثال: دو تیرانداز هر کدام به سمت هدفی شلیک می‌کنند. احتمال اینکه تیرانداز اول به هدف بزند 0/85 و احتمال اینکه تیرانداز دوم به هدف بزند 0/8 است. اگر هر دو هزمان به شلیک کنند.

الف) چقدر احتمال دارد هر دو به هدف بزنند.

$$0.85 \times 0.8 = 0.68$$

ب) هیچ کدام به هدف نزنند.

$$(1 - 0.85) \times (1 - 0.8) = 0.03$$

ج) حداقل یکی از ان ها به هدف بزنند.

$$0.85 + 0.8 - 0.85 \times 0.8 = 0.97$$

مثال: 7 کارت سفید، 6 کارت سبز و 1 کارت قرمز را به خوبی با هم مخلوط کرده و سپس از میان آنها به تصادف سه کارت یکی یکی و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه

الف) این سه کارت به ترتیب سفید، سبز و قرمز باشند.

$$\frac{7}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{1}{12} = 0.019$$

ب) دو کارت اول سبز و کارت سوم قرمز باشند.

$$\frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{1}{12} = 0.011$$

ج) دو کارت سبز و یک کارت قرمز باشند.

$$\frac{7}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{1}{12} \times 3 = 0.033$$

د) هر سه کارت همرنگ باشند.

$$\frac{7}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{14} \times \frac{4}{13} \times \frac{3}{12} = 0.12$$

ه) دو کارت سبز باشد.

$$\frac{6}{14} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{12} \times 3 = 0.33$$

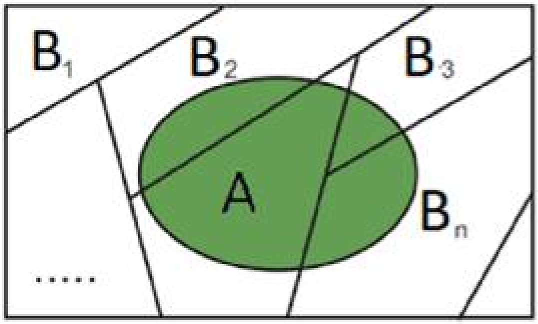
فرمول احتمال کل و قانون بیز:

تعریف: مجموعه‌های $B_1, B_2, \dots, B_n$ را افرازی از فضای نمونه گویند هرگاه

هیچ کدام از این مجموعه ها تهی نباشد.

این مجموعه ها دو به دو ناسازگار باشند.

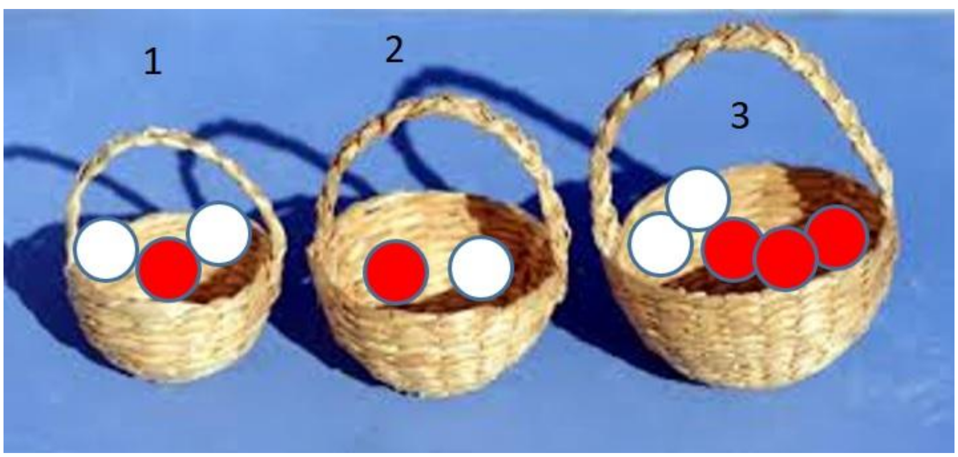
اجتماع مجموعه ها برابر فضای نمونه باشد.



قانون احتمال کل: فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ افرازی از فضای نمونه باشند. آنگاه احتمال A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots P(A|B_n)P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

مثال: سه سبد در اختیار داریم که در سبد اول دو مهره سفید و یک مهره قرمز و در سبد دوم یک مهره سفید و یک مهره قرمز و در سبد سوم نیز دو مهره سفید و سه مهره قرمز قرار دارد. یکی از سبدها را به طور تصادفی انتخاب میکنیم و یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره سفید خارج شود چقدر است؟



$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B_1) = \frac{2}{3} \qquad P(A|B_2) = \frac{1}{2} \qquad P(A|B_3) = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = 0.52$$

قانون بیز: احتمال شرطی A_j به شرط B به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(B_j \Big| A) = \frac{P(A \big| B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

مثال: درمثال قبلی، اگر بدانیم مهره‌ای که از سبد خارج شده، سفید است، احتمال اینکه این مهره از سبد سوم خارج شده باشد چقدر است؟

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \times P(B_3)}{0.52} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}{0.52} = 0.26$$

مثال: در یک آزمایش پزشکی، دیابت (مرض قند) یک فرد مبتلا به بیماری دیابت با احتمال 0/8 درستی تشخیص داده می‌شود و با احتمال 0/9 نیز برای افراد سالم نتیجه عدم ابتلا به این بیماری اعلام می‌شود. اگر از هر ۱۰۰۰۰ نفر مردم جامعه ۲ نفر دچار بیماری دیابت باشند احتمال اینکه نتیجه مثبت آزمایش یک فرد، بیانگر ابتلا به مرض قند باشد چقدر است

جواب: با توجه به مسئله، جامعه آماری یا فضای نمونه به دو گروه بیماران قندی و سالم طبقه‌بندی (افراز) شده است. حال اگر B را پیشامد ابتلا به دیابت و B' را عدم ابتلا به بیماری دیابت در نظر بگیریم و A پیشامد این باشد که نتیجه آزمایش مثبت است، اطلاعات زیر توسط مسئله داده شده.

A|B: پیشامد اینکه نتیجه آزمایش مثبت برای فرد مبتلا به دیابت باشد. یعنی آزمایش نشان دهد که فرد دیابتی مبتلا به بیماری دیابت است.

A'|B': پیشامد اینکه نتیجه آزمایش منفی مربوط به فرد سالم باشد. یعنی آزمایش نشان دهد که فرد سالم به دیابت دچار نیست. در نتیجه خواهیم داشت:

P(A|B)=0.8 P(A'|B')=0.9 P(B)=0.0002 P(A|B)=0.8 P(A'|B')=0.9 P(B)=0.0002

حال با استفاده از قضیه بیز می‌توانیم بنویسیم:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')} = \frac{0.8 \times 0.0002}{0.8 \times 0.0002 + (1 - 0.9) \times (1 - 0.0002)} = 0.0016$$

مثال: فرض کنید یک موسسه بیمه افراد جامعه را به سه گروه افراد دارای ریسک بالا، متوسط و پایین تقسیم نموده است که به ترتیب 20، 50 و 30 درصد جامعه را تشکیل می‌دهد. اطلاعات این موسسه نشان می‌دهد که احتمال تصادف کردن این گروه‌ها در طول سال به ترتیب 30، 15 و 5 درصد می‌باشد.

ابتدا احتمالات را به صورت زیر می‌نویسیم:

A: **تصادف کردن**

B1: **ریسک بالا**   B1: **ریسک متوسط**   B3: **ریسک پایین**

$$P(B1) = 0.2 \quad P(B2) = 0.5 \quad P(B3) = 0.3$$
$$P(A|B1) = 0.3 \quad P(A|B2) = 0.15 \quad P(A|B3) = 0.05$$

الف) اگر از هر یک از این گروه‌ها یک نفر به تصادف انتخاب شوند احتمال این‌که هیچکدام در طول سال تصادفی نداشته باشند را بیابید.

$$P(A'|B1) = 1 - 0.3 = 0.7$$
$$P(A'|B2) = 1 - 0.15 = 0.85$$
$$P(A'|B3) = 1 - 0.05 = 0.95$$

ب) اگر از افراد بیمه شده یک نفر انتخاب شود احتمال این‌که در طول سال تصادفی داشته باشند را بیابید.

با استفاده از قانون احتمال کل

$$P(A) = 0.2 \times 0.3 + 0.5 \times 0.15 + 0.3 \times 0.05 = 0.15$$

ج) اگر از افراد بیمه شده یک نفر در طول سال تصادفی نداشته باشد، احتمال این‌که این شخص از گروهی با ریسک متوسط باشد را بیابید.

با استفاده از قانون بیز:

$$P(B2 | A') = \frac{P(A'|B2)P(B2)}{P(A')} = \frac{0.85 \times 0.5}{1 - 0.15}$$

مثال:در یک دانشگاه وزن 4 درصد مردان و 1 درصد زنان از 60 کیلوگرم بیشتر است و میدانیم 60 درصد از دانشجویان زن می‌باشند. دانشجویی را به تصادف انتخاب می کنیم و وزن او از 60 کیلوگرم بیشتر باشد. احتمال اینکه این دانشجو زن باشد را بیابید.

جواب: طبق صورت مساله باید از قانون بیز استفاده کنیم. برای حل ابتدا پیشامدهای زیر را به صورت زیر تعریف می کنیم:

A: **وزن بیشتر از 60 کیلوگرم**

B1: **زن بودن (60 درصد)   و   B2: مرد بودن (40 درصد)**

اگر بدانیم فردی زن است احتمال اینکه وزن او بیشتر از 60 باشد با $P(A|B1)$ نمایش داده می‌شود که مقدار آن برابر 0.01 است

و اگر بدانیم فردی مرد است احتمال اینکه وزن او بیشتر از 60 باشد با $P(A|B2)$ نمایش داده می‌شود که مقدار آن برابر 0.04 است

$$P(B1|A) = \frac{P(A|B1)P(B1)}{P(A)} = \frac{P(A|B1)P(B1)}{P(A|B1)P(B1) + P(A|B2)P(B2)}$$
$$= \frac{0.01 \times 0.6}{0.01 \times 0.6 + 0.04 \times 0.4}$$

فصل سوم: متغیرهای تصادفی

متغیر تصادفی تابعی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود و با حروف بزرگ مانند X و Y و ... نمایش داده می‌شود و مقداری که این متغیرهای تصادفی اختیار می‌کنند را با x، y و ... نمایش می‌دهند.

برای آشنایی با متغیرتصادفی با چند مثال ساده شروع می‌کنیم:

مثال1: فرض کنید سکه ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد شیرهای مشاهده شده در این سه پرتاب باشد مجموعه مقادیر X و تابع احتمال آن را تعیین کنید:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

پس مجموعه مقادیر X عبارتند از {0,1,2,3} این مجموعه مقادیر را **تکیه گاه متغیرتصادفی** گویند. تابع احتمال این متغیرتصادفی عبارتست از:

تیکه گاه X	0	1	2	3
احتمال	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

مثال2: فرض کنید تاسی را دوبار پی در پی پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده‌ی اختلاف اعداد روی دو تاس باشند. تکیه گاه و تابع احتمال متغیرتصادفی X را بیابید:

فضای نمونه به صورت

$$S = \{(1,1)^{\to 0}(1,2)^{\to 1}(1,3)^{\to 2}(1,4)^{\to 3}(1,5)^{4}(1,6)^{\to 5}$$
$$(2,1)^{\to 1}(2,2)^{\to 0}(2,3)^{\to 1}(2,4)^{\to 2}(2,5)^{\to 3}(2,6)^{\to 4}$$
$$(3,1)^{\to 2}(3,2)^{\to 1}(3,3)^{\to 0}(3,4)^{\to 1}(3,5)^{\to 2}(3,6)^{\to 3}$$
$$(4,1)^{\to 3}(4,2)^{\to 2}(4,3)^{\to 1}(4,4)^{\to 0}(4,5)^{\to 1}(4,6)^{\to 2}$$
$$(5,1)^{\to 4}(5,2)^{\to 3}(5,3)^{\to 2}(5,4)^{\to 1}(5,5)^{\to 0}(5,6)^{\to 1}$$
$$(6,1)^{\to 5}(6,2)^{\to 4}(6,3)^{\to 3}(6,4)^{\to 2}(6,5)^{\to 1}(6,6)^{\to 0}\}$$

تکیه گاه متغیر تصادفی X برابر است با:

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

تکیه گاه X	0	1	2	3	4	5
احتمال	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

در مثال قبلی اگر Y نشان دهنده مجموع اعداد روی دو تاس باشد. تکیه گاه و تابع احتمال متغیر تصادفی Y عبارتند از:

$$S_Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

تکیه گاه	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
احتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مثال 3: سه مهره به شماره های 1، 2 و 3 را در 3 جعبه به شماره‌های 1، 2 و 3 به طور تصادفی می‌اندازیم به طوریکه در هر جعبه یک مهره قرار گیرد. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده‌ی تعداد جورها (تعداد مهره‌هایی که در جعبه با شماره متناظر خودشان قرار گرفته اند) باشند.مطلوبست:

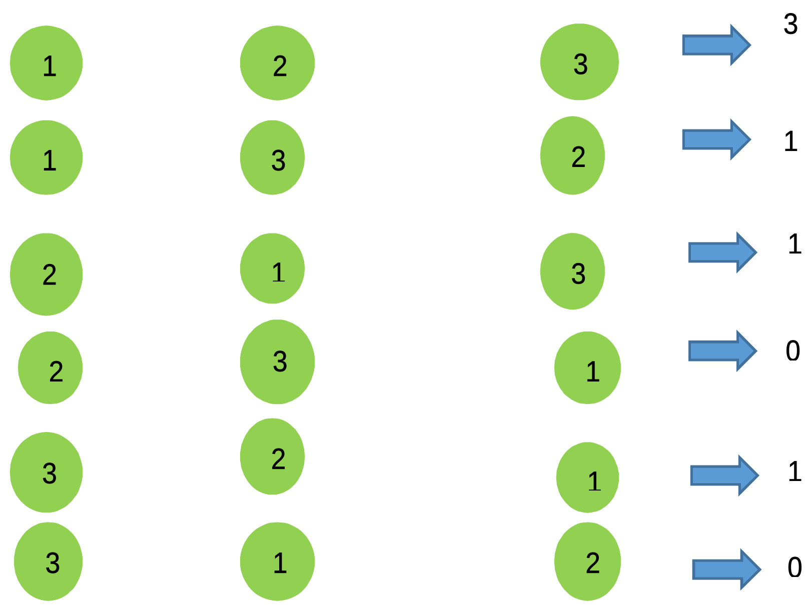
الف) تکیه گاه متغیر تصادفی X و تابع احتمال متغیر تصادفی X

ب) احتمال اینکه دقیقاً یک جور داشته باشیم.

ج) احتمالات زیر را بیابید:

$$P(X = 0.5) \qquad P(0 \le X < 2)$$

1	2	3



$$S_X = \{0, 1, 3\}$$

تکیه گاه Y	0	1	3
احتمال	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$P(X = 1) = 0.5$$

$$P(X = 0.5) = 0 \qquad P(0 \le X < 2) = \frac{5}{6}$$

مثال4: تابع زیر تابع احتمال متغیر تصادفی X است:

$$P(X = x) = \frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^x \qquad x = 0,1,2,3,4,5, \dots \dots ..$$

الف) تکیه گاه X چیست؟

ب) احتمالات زیر را به دست آورید:

$$P(X \le 2.5) \qquad P(X \ge 3.5)$$

الف) $S_X = \{0, 1, 2, , \dots . \}$

ب) $\mathbf{P(X \le 2.5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X + 2) = \frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^0 + \frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^1 + \frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^2 =}$

$$\mathbf{\frac{5}{6} \times \left\{1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right\} = 0.995}$$

ج) $\mathbf{P(X \ge 3.5) = 1 - P(X < 3.5) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X + 2) + P(X = 3)\}}$

$$\mathbf{= 1 - \{\frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^0 + \frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^1 + \frac{5}{6} \times (\frac{1}{6})^2 + \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3\right\} = 1 - 0.999 = 0.001}$$

تابع توزیع تجمعی: اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال P(X=x) باشد آنگاه تابع توزیع تجمعی X که با نماد $F_X(x)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{t \le x} P(X = t)$$

برای تشریح تابع توزیع تجمعی به مثال زیر توجه کنید:

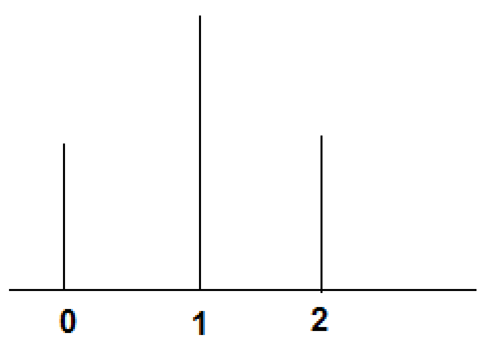
مثال5: سکه ای را 2 بار پرتاب می‌کنیم. اگر X نشان دهنده تعداد شیرها در این دو پرتاب باشد تابع توزیع تجمعی آن را به دست آورید.

برای یافتن تابع توزیع تجمعی باید ابتدا تکیه‌گاه و تابع احتمال X را بیابیم. فضای نمونه این آزمایش به صورت زیر است:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$S_X = \{0, 1, 2\}$$

تکیه گاه Y	0	1	2
احتمال	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$



$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

مثال6: تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

تکیه گاه X	-1	0	2	3	5
احتمال	0.05	0.25	0.45	0.15	0.1

تابع توزیع تجمعی X را بیابید:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.05 & -1 \leq x < 0 \\ 0.05 + 0.25 = 0.3 & 0 \leq x < 2 \\ 0.3 + 0.45 = 0.75 & 2 \leq x < 3 \\ 0.75 + 0.15 = 0.9 & 3 \leq x < 5 \\ 0.9 + 0.1 = 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

مثال: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر باشد:

تکیه گاه	1	2	3	4
احتمال	0.125	0.5	0.125	0.25

تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورید:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.125 & 1 \leq x < 2 \\ 0.625 & 2 \leq x < 3 \\ 0.75 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

محاسبه احتمالات از روی تابع توزیع:

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد با تابع توزیع $F_X(x)$ می‌توانیم براساس این تابع توزیع تکیه گاه متغیرتصادفی و احتمالات مختلف را محاسبه کنیم:

در واقع نقاط پرش متغیرتصادفی گسسته در تابع توزیع همان تکیه گاه به حساب می‌آید.

برای محاسبه تابع احتمال متغیرتصادفی X از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

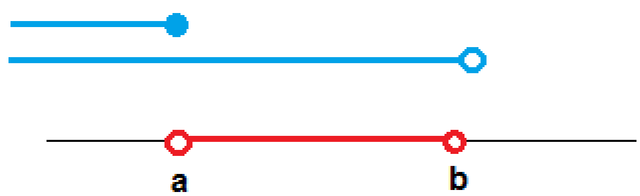
$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$$

توجه کنید:

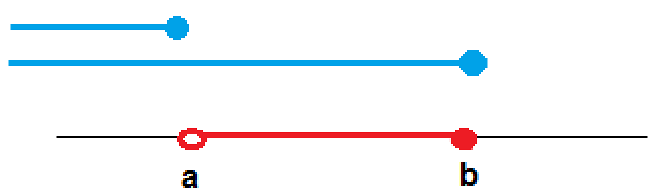
$$P(X \leq b) = F_X(b) \qquad P(X < b) = F_X(b^-)$$

همچنین برای محاسبه احتمالات از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

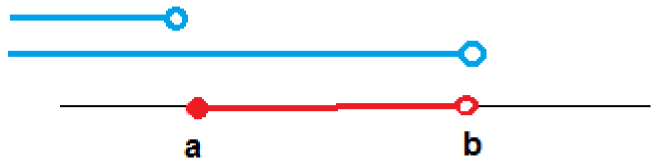
$$P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$$



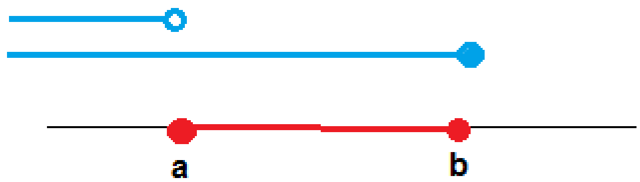
$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$



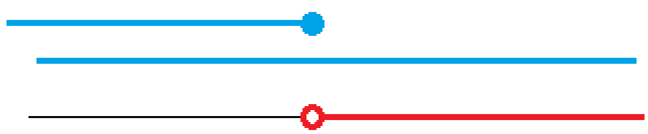
$$P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$$



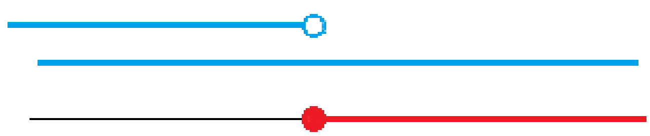
$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$$



$$P(X > a) = 1 - F_X(a)$$



$$P(X \geq a) = 1 - F_X(a^-)$$



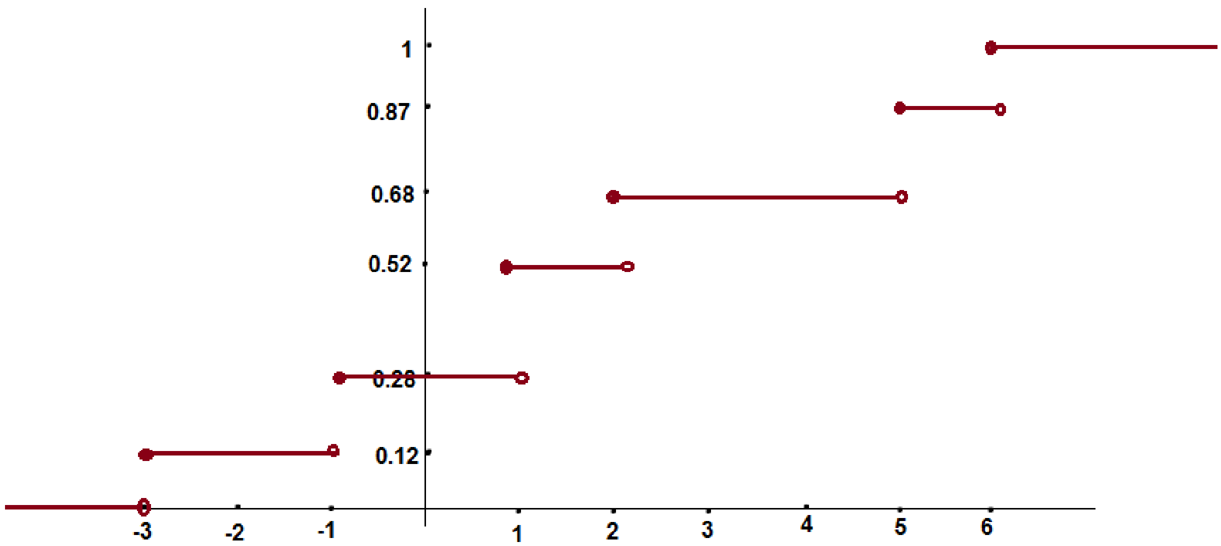
مثال 7: فرض کنید تابع توزیع متغیرتصادفی X به صورت زیر باشد:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 0.12 & -3 \leq x < -1 \\ 0.28 & -1 \leq x < 1 \\ 0.52 & 1 \leq x < 2 \\ 0.68 & 2 \leq x < 5 \\ 0.87 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

مطلوبست:الف) تکیه گاه متغیر تصادفی X را تعیین کنید.

$$\boldsymbol{S_X = \{-3, -1, 1, 2, 5, 6\}}$$

ب) نمودار تابع توزیع را رسم کنید:



ج) تابع احتمال X را به دست آورید:

$$\boldsymbol{P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)}$$

$$\boldsymbol{P(X = -3) = F_X(-3) - F_X(-3^-) = 0.12 - 0 = 0.12}$$

$$\boldsymbol{P(X = -1) = F_X(-1) - F_X(-1^-) = 0.28 - 0.12 = 0.16}$$

$$P(X = 1) = F_X(1) - F_X(1^-) = 0.52 - 0.28 = 0.24$$

$$P(X = 2) = F_X(2) - F_X(2^-) = 0.68 - 0.52 = 0.16$$

$$P(X = 5) = F_X(5) - F_X(5^-) = 0.87 - 0.68 = 0.19$$

$$P(X = 6) = F_X(6) - F_X(6^-) = 1 - 0.87 = 0.13$$

تکیه گاه	-3	-1	1	2	5	6
احتمال	0.12	0.16	0.24	0.16	0.19	0.13

د) احتمالات زیر را با استفاده از تابع توزیع محاسبه کنید:

$$P(2 < X \le 5) = F_X(5) - F_X(2) = 0.87 - 0.68 = 0.19$$

$$P(X \ge 1) = 1 - F_X(1^-) = 1 - 0.28 = 0.72$$

$$P(-2 \le X \le 1) = F_X(1) - F_X(-2^-) = 0.52 - 0.12 = 0.4$$

$$P(0 \le X < 6) = F_X(6^-) - F_X(0^-) = 0.87 - 0.28 = 0.59$$

$$P(-3 < X < 2) = F_X(2^-) - F_X(-3) = 0.52 - 0.12 = 0.4$$

متغیرهای تصادفی پیوسته

متغیرتصادفی پیوسته متغیری است که تکیه گاه آن به صورت یک فاصله عددی یا اجتماعی از چند فاصله باشد.

باید توجه داشت که **احتمال وقوع اینکه متغیرتصادفی پیوسته فقط یک مقدار خاصی را اختیار کند همواره برابر صفر** است. یعنی:

$$P(X = a) = 0$$

بنابراین روابط زیر برای متغیرهای تصادفی پیوسته برقرار هستند:

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

به همین منظور احتمال در حالت پیوسته بر روی یک فاصله تعریف می‌شود و تابع احتمال آن را تابع چگالی گویند و با نماد $f_X(x)$ نمایش می‌دهند.

از طرفی برای محاسبه احتمال روی یک فاصله از انتگرال استفاده می کنیم، یعنی:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

یادآوری انتگرال:

$$1:\quad \int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$2:\quad \int_a^b c dx = cx\bigg|_a^b = c(b-a)$$

$$3:\quad \int_a^b e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k}\bigg|_a^b = \frac{e^{kb}}{k} - \frac{e^{ka}}{k}$$

$$4:\quad \int_0^\infty x^{a-1}e^{-bx} dx = \frac{(a-1)!}{b^a}$$

مثال8: انتگرال های زیر را حل کنید:

$$\int_2^5 (4x^2 - 3x + 2)dx = ?$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right)\bigg|_2^5 = \left(\frac{4\times 5^3}{3} - \frac{3\times 5^2}{2} + 2\times 5\right) - \left(\frac{4\times 2^3}{3} - \frac{3\times 2^2}{2} + 2\times 2\right) =$$

$$= \frac{1000 - 225 + 60}{6} - \frac{64 - 36 + 24}{6} = \frac{835}{6} - \frac{52}{6} = 130.5$$

$$\int_0^{10} 6e^{-2x}dx = \frac{6e^{-2x}}{-2}\Bigg|_0^{10} = (-3\,e^{-2\times 10}) - (-3e^{-2\times 0}) = 3 - 3e^{-20}$$

$$\int_0^{\infty} x^5 e^{-\frac{x}{3}}dx = \frac{(6-1)!}{(\frac{1}{3})^6} = \frac{5!}{\frac{1}{729}} = 120 \times 729 = 87480$$

$$a = 6 \quad b = \frac{1}{3}$$

مثال9: متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{k}{3}; & 0 \le x \le 1 \\ 0\,; & o.w \end{cases}$$

مطلوبست: الف) تکیه گاه متغیر تصادفی X

تکیه گاه متغیر تصادفی پیوسته مقادیری است که تابع چگالی صفر نیست پس تکیه گاه برابر است با

$$S_X = [0, 1]$$

ب) مقدار ثابت k را به دست آورید:

همیشه انتگرال تابع چگالی روی کل تکیه گاه برابر یک است، پس:

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x + \frac{k}{3}\right)dx = \left(\frac{2}{3} \times \frac{x^2}{2} + \frac{k}{3}x\right)\Bigg|_0^1 + \frac{k}{3}(1-0) = \left(\frac{1}{3} + \frac{k}{3}\right) - (0+0)$$

$$\rightarrow \frac{1}{3} + \frac{k}{3} = 1 \quad \rightarrow k = 2$$

ج) احتمالات زیر را محاسبه کنید:

$$P(X \le 3) \quad P(0 \le X < 0.5) \quad P(-2 < X \le 0.5) \quad P\left(X > \frac{1}{3}\right) \quad P(X = 0.7)$$

$$\int \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\int (x+1)dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$P(X \le 3) = P(0 \le X \le 1) = 1$$

$$P(0 \le X < 0.5) = \int_0^{0.5} \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^{0.5} = \frac{2}{3}\left(\frac{0.5^2}{2} + 0.5\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{0^2}{2} + 0\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{0.5^2}{2} + 0.5\right) \sim 0.42$$

$$P(-2 < X \le 0.5) = P(0 < X < 0.5) = 0.42$$

$$P\left(X > \frac{1}{3}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{\frac{1}{3}^2}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

$$P(X = 0.7) = 0$$

تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی پیوسته:

اگر X متغیر تصادفی پیوستهبا تابع چگالی $f_X(x)$ باشد، آنگاه تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

مثال10: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای چگالی زیر باشد:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2)\,; & -1 < x < 1 \\ 0; & o.w. \end{cases}$$

تابع توزیع X را به دست آورید:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\ ; & x < -1 \\ \int_{-\infty}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt & -1 \le x < 1 \\ 1; & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \frac{3}{4}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{3}{4}\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{4}x-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\ ; & x < -1 \\ \frac{3}{4}x-\frac{x^3}{4}+\frac{1}{2}\ ; & -1 \le x < 1 \\ 1; & x \ge 1 \end{cases}$$

مثال11: متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}; & 0 \le x \le 2 \\ 0\ ; & o.w \end{cases}$$

تابع توزیع متغیر تصادفی X را به دست آورید:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\ ; & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{x} (\frac{1}{4}t+\frac{1}{4})\,dt & 0 \le x < 2 \\ 1; & x \ge 2 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{x} (\frac{1}{4}t+\frac{1}{4})\,dt = \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\right)dt = \frac{t^2}{8}+\frac{t}{4}\Big|_{0}^{x} = \frac{x^2}{8}+\frac{x}{4}$$

$$\boldsymbol{F_X(x) = \begin{cases} 0\,; & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x}{4} & 0 \le x < 2 \\ 1; & x \ge 2 \end{cases}}$$

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی:

اگر X یک متغیر تصادفی باشد امید ریاضی X که با E(X) نمایش داده می‌شود و به صورت زیر جمع می‌شود:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x \times P(X = x) & \text{متغیرتصادفی گسسته} \\ \int x \times f_X(x)dx & \text{متغیر تصادفی پیوسته} \end{cases}$$

واریانس X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \begin{cases} \sum_x x^2 \times P(X = x) & \text{متغیرتصادفی گسسته} \\ \int x^2 \times f_X(x)dx & \text{متغیر تصادفی پیوسته} \end{cases}$$

خواص امیدریاضی و واریانس:

فرض کنید a، b و c اعداد ثابتی باشند. اگر X یک متغیرتصادفی باشد آنگاه ویژگی های زیر همواره برقرارهستند:

$$\boldsymbol{E(b) = b}$$

$$\boldsymbol{E(aX) = aE(X)}$$

$$\boldsymbol{E(ax + b) = aE(X) + b}$$

$$\boldsymbol{E(aX^2 + bX + c) = aE(X^2) + bE(X) + c}$$

$$Var(b) = 0$$

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

مثال12: فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد:

تکیه گاه	0	1	2
احتمال	0.35	0.5	0.15

الف) امید ریاضی و واریانس X را به دست آورید.

$$E(X) = 0 \times 0.35 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.15 = 0.8$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0.35 + 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.15 = 1.1$$

$$var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 1.1 - 0.8^2 = 0.46$$

ب) مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$E(3X - 1) \qquad Var\left(-\frac{X}{2} + 2\right) \qquad E(-2X^2 + 3X - 1)$$

$$E(3X - 1) = 3E(X) - 1 = 3 \times 0.8 - 1 = 1.4$$

$$Var\left(-\frac{X}{2} + 2\right) = \frac{Var(X)}{4} = \frac{0.46}{4} = 0.115$$

$$E(-2X^2 + 3X - 1) = -2E(X^2) + 3E(X) - 1 = (-2 \times 1.1) + (3 \times 0.8) - 1 = -0.8$$

مثال13: فرض کنید متغیرتصادفی X نشان دهنده‌ی طول عمر نوعی لاستیک بر حسب سال باشد که دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x} & x > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

الف)امید ریاضی و واریانس X را به دست آورید.

ب) مقادیر زیر را محاسبه کنید:

$$E(5X^2 + 2) \qquad Var(3X - 0.5)$$

$$E(X) = \int x \times f_X(x)dx = \int_0^\infty x.0.5e^{-0.5x}dx = 0.5\int_0^\infty x.e^{-0.5x}dx$$

$$\rightarrow \quad a = 2 \quad b = 0.5$$

$$= 0.5 \times \frac{(2-1)!}{0.5^2} = 2$$

$$E(X^2) = \int x^2 \times f_X(x)dx = \int_0^\infty x^2.0.5e^{-0.5x}dx = 0.5\int_0^\infty x^2e^{-0.5x}dx$$

$$\rightarrow \quad a = 3 \quad b = 0.5$$

$$= 0.5 \times \frac{(3-1)!}{0.5^3} = 8$$

$$var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 8 - 2^2 = 4$$

$$E(5X^2 + 2) = 5E(X^2) + 2 = 5 \times 8 + 2 = 42$$

$$Var(3X - 0.5) = 9Var(X) = 36$$

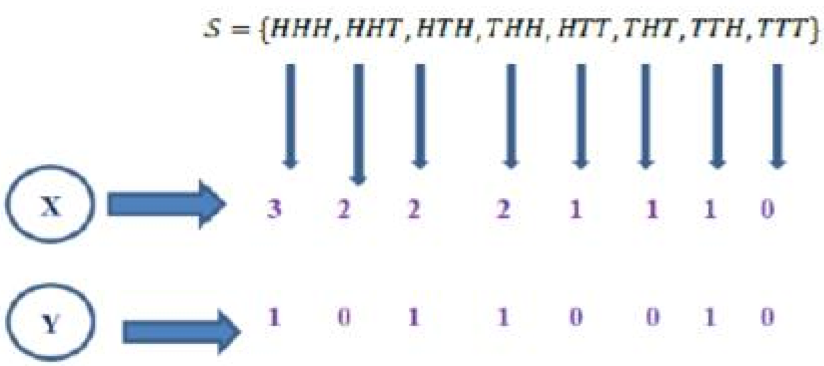
متغیرهای تصادفی دوبعدی:

در بسیاری مسایل ممکن است که نتایجی از چندین متغیر تصادفی را به طور همزمان داشته باشیم. در اینجا توابع احتمال دو بعدی را معرفی می‌کنیم یعنی احتمال این که دو متغیر تصادفی X و Y همزمان رخ دهند. در این صورت احتمال دو بعدی X و Y را تابع احتمال توام X و Y گویند و به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$P(X = x, Y = y)$$

برای روشن شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید:

فرض کنید سکه ای را سه بار پی در پی پرتاب می‌کنیم. اگر X تعداد شیرهای مشاهده شده در سه پرتاب باشد و Y تعداد شیرهای مشاهده شده در پرتاب سوم باشند. **تابع احتمال توام X و Y را به دست آورید.**



تکیه X و Y عبارتست از:

$S_X = \{0, 1, 2, 3\}$ $S_Y = \{0, 1\}$

	X=0	X=1	X=2	X=3
Y=0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
Y=1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

احتمالات زیر را محاسبه کنید:

$$P(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X \leq 2, Y = 1) = \frac{3}{8}$$

مثال 2: 12 ماشین وجود دارد که 6 عدد آن در وضعیت خوب (G)، 4 عدد دارای نقص در قسمت انتقال(DT) و 2 عدد دارای نقص در مکانیسم فرمان (DS) می‌باشند. فرض کنید 2 ماشین به طور تصادفی انتخاب کرده‌ایم و متغیر تصادفی X نشان دهنده تعداد ماشین‌های DT در این نمونه و متغیر تصادفی Y تعداد ماشین‌های DS در این نمونه هستند. مطلوبست:

الف) تابع احتمال توام X و Y را دست آورید:

ب) احتمالات زیر را محاسبه کنید:

$$P(X \geq 1 , Y < 1) \qquad P(X + Y \leq 1.5)$$

جواب الف)

$$S_X = \{0, 1, 2\} \qquad S_Y = \{0, 1, 2\}$$

Y X	0	1	2
0	$\frac{\binom{6}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{5}{22}$	$\frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{2}{11}$	$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{66}$
1	$\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{4}{11}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{4}{33}$	0
2	$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{11}$	0	0

جواب ب)

$$P(X \geq 1 , Y < 1) = \frac{4}{11} + \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$$

$$P(X + Y \leq 1.5) = \frac{5}{22} + \frac{2}{11} + \frac{4}{11} = \frac{17}{22}$$

مثال3: یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید X عدد کوچکتر و Y تفاضل دو عدد مشاهده شده باشد. مطلوبست:

الف) تابع احتمال توام X و Y

ب) احتمالات زیر را محاسبه کنید:

$$P(X + Y > 3) \qquad P(X \geq 3, Y \geq 3) \qquad P(X = 2, Y > 3)$$

جواب الف)

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1)^{\to(1,0)}(1,2)^{\to(1,1)}(1,3)^{\to(1,2)}(1,4)^{\to(1,3)}(1,5)^{\to(1,4)}(1,6)^{\to(1,5)} \\ &(2,1)^{\to(1,1)}(2,2)^{\to(2,0)}(2,3)^{\to(2,1)}(2,4)^{\to(2,2)}(2,5)^{\to(2,3)}(2,6)^{\to(2,4)} \\ &(3,1)^{\to(1,2)}(3,2)^{\to(2,1)}(3,3)^{\to(3,0)}(3,4)^{\to(3,1)}(3,5)^{\to(3,2)}(3,6)^{\to(3,3)} \\ &(4,1)^{\to(1,3)}(4,2)^{\to(2,2)}(4,3)^{\to(3,1)}(4,4)^{\to(4,0)}(4,5)^{\to(4,1)}(4,6)^{\to(4,2)} \\ &(5,1)^{\to(1,4)}(5,2)^{\to(2,3)}(5,3)^{\to(3,2)}(5,4)^{\to(4,1)}(5,5)^{\to(5,0)}(5,6)^{\to(5,1)} \\ &(6,1)^{\to(1,5)}(6,2)^{\to(2,4)}(6,3)^{\to(3,3)}(6,4)^{\to(4,2)}(6,5)^{\to(5,1)}(6,6)^{\to(6,0)}\} \end{aligned}$$

$$S_X = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad S_Y = \{0,1,2,3,4,5\}$$

Y / X	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0

4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0
6	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0

جواب ب)

$$P(X+Y>2)=\frac{32}{36}$$

$$P(X\geq 3,Y\geq 1)=\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36}=\frac{12}{36}$$

$$P(X=2,Y>3)=\frac{2}{36}+0=\frac{2}{36}$$

احتمالات حاشیه‌ای (احتمالات کناری)

زمانیکه احتمال توام دو متغیر تصادفی را دشته باشیم می‌توانی» احتمال تک تک متغیرها را به تنهایی به دست آوریم. به این احتمالات احتمالات کناری گویند که به صورت زیر به دست می‌آیند:

احتمال کناری X

$$P(X=x)=\sum_y P(X=x,Y=y)$$

احتمال کناریY

$$P(Y=y)=\sum_x P(X=x,Y=y)$$

مثال4: تابع احتمال توام زیر را درنظر بگیرید:

Y	2	3	5	7
X				

-1	0.05	0.25	0.15	0
0	0	0.25	0.01	0.1
1	0	0	0.12	0.07

الف) تابع احتمال کناری X و کناری Y را محاسبه کنید.

ب) احتمالات زیر را به دست آورید:

$$P(Y = 2) \quad P(Y \geq 3) \quad P(|X| = 1) \quad P(X \geq 0, Y < 3)$$

جواب الف)

Y / X	2	3	5	7	جمع
-1	0.05	0.25	0.15	0	0.45
0	0	0.25	0.01	0.1	0.36
1	0	0	0.12	0.07	0.19
جمع	0.05	0.5	0.28	0.17	

تکیه گاه X	-1	0	1
احتمال	0.45	0.36	0.19

تکیه گاه Y	2	3	5	7
احتمال	0.05	0.5	0.28	0.17

$$P(Y = 2) = 0.05$$

$$P(Y \geq 3) = 0.95$$

$$P(|X| = 1) = 0.64$$

$$P(X \geq 0, Y < 3) = 0$$

احتمالات شرطی: اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند آنگاه احتمال شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود:

احتمال شرطي X به شرط Y

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

احتمال شرطي Y به شرط X

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

مثال5: ظرفی شامل 3 مهره سفید، 2 مهره سیاه و 3 مهره قرمز است. از این ظرف به تصادف 4 مهره خارج می کنیم. X تعداد مهره های سفید و متغیر تصادفی Y تعداد مهره های سیاه در این نمونه باشد.

الف) تابع احتمال X را به دست آورید.

ب) تابع احتمال حاشیه ای X و حاشیه ای Y را به دست آورید.

ج) احتمالات زیر را محاسبه کنید.

$P(X = 2|Y = 1)$ $\quad P(X \leq 1|Y = 2)$ $\quad P(Y \geq 1|X = 3)$ $\quad P(1 \leq X \leq 3|Y = 0)$ $\quad P(Y \leq 1|X \leq 1)$

جواب الف)

$\boldsymbol{S_X = \{0, 1, 2, 3\}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{S_Y = \{0, 1, 2\}}$

Y / X	0	1	2	جمع
0	$\mathbf{0}$	$\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}} = \mathbf{\frac{2}{70}}$	$\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \mathbf{\frac{3}{70}}$	$\mathbf{\frac{5}{70}}$
1	$\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{3}}{\binom{8}{4}} = \mathbf{\frac{3}{70}}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \mathbf{\frac{18}{70}}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \mathbf{\frac{9}{70}}$	$\mathbf{\frac{30}{70}}$

2	$\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{9}{70}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{18}{70}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{3}{70}$	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{\binom{3}{3}\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{3}{70}$	$\frac{\binom{3}{3}\binom{2}{1}}{\binom{8}{4}}=\frac{2}{70}$	0	$\frac{5}{70}$
جمع	$\frac{15}{70}$	$\frac{40}{70}$	$\frac{15}{70}$	

تابع احتمال حاشیه ای X

تکیه گاه X	0	1	2	3
احتمال	$\frac{5}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{30}{70}$	$\frac{5}{70}$

تابع احتمال حاشیه ای Y

تکیه گاه Y	0	1	2
احتمال	$\frac{15}{70}$	$\frac{40}{70}$	$\frac{15}{70}$

$$P(X=2|Y=1)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(Y=1)}=\frac{\frac{18}{70}}{\frac{40}{70}}=\frac{18}{40}$$

$$P(X\leq 1|Y=2)=\frac{P(X\leq 1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{\frac{12}{70}}{\frac{15}{70}}=\frac{12}{15}$$

$$P(Y\geq 2|X=3)=\frac{P(X=3,Y\geq 1)}{P(X=3)}=\frac{\frac{2}{70}}{\frac{5}{70}}=\frac{2}{5}$$

$$P(1 \le X \le 3|Y=0) = \frac{P(1 \le X \le 3, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{\frac{15}{70}}{\frac{15}{70}} = 1$$

$$P(Y \le 1|X \le 1) = \frac{P(X \le 1, Y \le 1)}{P(X \le 1)} = \frac{\frac{23}{70}}{\frac{35}{70}} = \frac{23}{35}$$

کوواریانس و ضریب همبستگی:

کوواریانس شاخصی است که نوع و شدت رابطه خطی بین دو متغیر تصادفی X و Y را مشخص می‌کند. رابطه‌ی بین دو متغیر می‌تواند به سه حالت زیر باشد:

الف) با افزایش یک متغیر، متغیر دیگر افزایش یابد وبالعکس.

ب) با افزایش یک متغیر، متغیر دیگر کاهش یابد و بالعکس.

ج) افزایش یا کاهش یک متغیر تاثیری بر روی متغیر دیگر نداشته باشد.

کوواریانس X و Y به صورت COV(X,Y) نشان داده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyP(X=x, Y=y)$$

نکته: کوواریانس بیانگر تغییرات همزمان X و Y است، بنابراین:

الف) اگر $COV(X,Y)$ مثبت باشد آنگاه تغییرات X و Y هم جهت است. (مستقیم)

ب) اگر $COV(X,Y)$ منفی باشد آنگاه تغییرات X و Y خلاف جهت یکدیگر است. (معکوس)

ج) اگر $COV(X,Y)$ صفر باشد آنگاه X و Y از نظر خطی رابطه‌ای با هم ندارند.

ضریب همبستگی: کوواریانس معیاری است که به واحد اندازه‌گیری بستگی دارد. به همین خاطر معیار دیگری با نام ضریب همبستگی را معرفی می‌کنیم که آزاد از واحد اندازه‌گیری می‌باشد و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

توجه کنید ضریب همبستگی همواره عددی است بین 1- و 1.

نکته: در مورد ضریب همبستگی سه مورد زیر را داریم:

الف) اگرضریب همبستگی مثبت باشد آنگاه تغییرات X و Y هم جهت است. (مستقیم)

ب) اگرضریب همبستگی منفی باشد آنگاه تغییرات X و Y خلاف جهت یکدیگر است. (معکوس)

ج) اگرضریب همبستگی صفر باشد آنگاه X و Y از نظر خطی رابطه‌ای با هم ندارند.

مثال6: تابع احتمال توام X و Y را درنظربگیرید:

Y / X	-1	0	3
2	0.1	0.4	0
4	0.15	0.2	0.15

کوواریانس و ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید:

تکیه گاه X	2	4
احتمال	0.5	0.5

$$E(X) = (2 \times 0.5) + (4 \times 0.5) = 3$$

$$E(X^2) = (4 \times 0.5) + (16 \times 0.5) = 10$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 10 - 9 = 1$$

تکیه گاه Y	-1	0	3
احتمال	0.25	0.6	0.15

$$E(Y) = (-1 \times 0.25) + (0 \times 0.6) + (3 \times 0.15) = 0.2$$

$$E(Y^2) = (1 \times 0.25) + (0 \times 0.6) + (9 \times 0.15) = 1.6$$

$$Var(X) = E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = 1.6 - 0.04 = 1.56$$

$$E(XY) = (2 \times (-1) \times 0.1) + (4 \times (-1) \times 0.15) + (4 \times 3 \times 0.15) = 1$$

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - 3 \times 0.2 = 0.4$$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{0.4}{\sqrt{1 \times 1.56}} = 0.32 > 0$$

مثال7: از ظرفی محتوی 3 توپ قرمز، 4 توپ سبز و 5 توپ آبی، سه توپ همزمان خارج می‌کنیم. اگر X نشان دهنده تعداد توپ های قرمز و Y نشان دهنده توپ های سبز باشد.

الف) توزیع احتمالات توام X و Y را بیابید.

در این نمونه سه تایی، X می تواند $\{0,1,2,3\}$ و Y می تواند $\{0,1,2,3\}$ باشد. پس تابع احتمال به صورت زیر خواهد بود:

X / Y	0	1	2	3
0	$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{15}{220}$	$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}$

1	$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}}=\frac{40}{220}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{60}{220}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{12}{3}}=\frac{12}{220}$	0
2	$\frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{30}{220}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}=\frac{18}{220}$	0	0
3	$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{4}{220}$	0	0	0

ب) مقدار $P(1 \le X + Y \le 2)$ را محاسبه کنید: **حل:**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P(1 \le X + Y \le 2)} &= \boldsymbol{P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1)} \\ &= \frac{40}{220} + \frac{30}{220} + \frac{30}{220} + \frac{60}{220} = \frac{160}{220}\end{aligned}$$

ج) توزیع حاشیه‌ای X و توزیع حاشیه‌ای Y را به دست آورید.

تابع احتمال حاشیه ای X

X=x	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

تابع احتمال حاشیه ای Y

Y=y	0	1	2	3
P(Y=y)	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$

د) احتمالات زیر را محاسبه کنید:

$$\mathbf{P(Y=2 \mid X \le 1)} = \frac{P(X \le 1, Y=2)}{P(X \le 1)} = \frac{\frac{30}{220} + \frac{18}{22}}{\frac{84}{220} + \frac{108}{220}} = \frac{48}{192}$$

$$\boldsymbol{P(1 \le X < 3 \mid Y=1)} = \frac{P(1 \le X < 3, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{60}{220} + \frac{12}{220}}{\frac{112}{220}} = \frac{72}{112}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{220}$$

$$P(X\le 2, Y\ge 2)=\frac{30}{220}+\frac{18}{220}+\frac{4}{220}=\frac{52}{220}$$

ه) ضریب همبستگی را محاسبه نمایید:

$$E(X)=0+\left(1\times\frac{108}{220}\right)+\left(2\times\frac{27}{220}\right)+\left(3\times\frac{1}{220}\right)=\frac{165}{220}$$

$$E(X^2)=0+\left(1\times\frac{108}{220}\right)+\left(4\times\frac{27}{220}\right)+\left(9\times\frac{1}{220}\right)=\frac{225}{220}$$

$$Var(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{225}{220}-\left(\frac{165}{220}\right)^2=0.46$$

$$E(Y)=0+\left(1\times\frac{112}{220}\right)+\left(2\times\frac{48}{220}\right)+\left(3\times\frac{4}{220}\right)=\frac{220}{220}=1$$

$$E(Y^2)=0+\left(1\times\frac{112}{220}\right)+\left(4\times\frac{48}{220}\right)+\left(9\times\frac{4}{220}\right)=\frac{340}{220}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2=\frac{340}{220}-(1)^2=0.55$$

$$\ldots)+0+\left(2\times 1\times\frac{18}{220}\right)$$

$$+0+0+0+0+0=\frac{\ldots}{220}$$

$$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{120}{220}-\frac{165}{220}\times 1=-45$$

$$\rho_{X,Y}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{-45}{\sqrt{0.46\times 0.55}}=-0.41$$

توزیع‌های مهم احتمال: توزیع دوجمله‌ای - توزیع پواسن - توزیع هندسی

آزمایش برنولی: اگر یک آزمایش تصادفی تنها دو نتیجه ممکن داشته باشد را یک آزمایش برنولی گویند مانند پرتاب سکه، معیوب یا سالم بودن محصولات یک کارخانه، پیروزی یا شکست در یک مسابقه

در آزمایش برنولی نتیجه مورد نظر را موفقیت گوییم و احتمال رخداد آن را با P نمایش می‌دهیم. نتیجه دیگر راشکست گوییم و احتمال رخداد آن را با q=1-p نمایش می‌دهیم.

- اگر مشاهده 6 در پرتا ب تاس موفقیت باشد آنگاه:

موفقیت: مشاهده عدد شش $\Longrightarrow$ $p = \frac{1}{6}$

شکست: مشاهده عدد غیر شش $\Longrightarrow$ $q = \frac{5}{6}$

- سالم یا مبتلا بودن به بیماری دیابت

بودن سالم: موفقیت $\Longrightarrow$ $p = 0.85$

مبتلا بودن: شکست $\Longrightarrow$ $q = 0.15$

توزیع دوجمله ای: اگر یک آزمایش برنولی را n بار به طور مستقل تکرار کنیم و متغیرتصادفی X نشان دهنده‌ی تعداد موفقیت ها در این n آزمایش باشد آنگاه توزیع احتمال متغیرتصادفی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad ; x = 0, 1, 2, \dots, n$$

p احتمال موفقیت و q احتمال شکست است. توزیع دو جمله ای را با نماد $X \sim bin(n, p)$ نمایش می‌دهند.

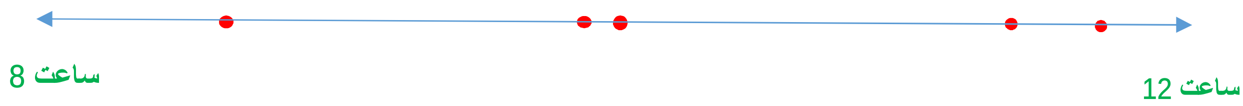
امیدریاضی و واریانس توزیع دوجمله ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(X) = np \qquad Var(X) = npq$$

در پرتاب تاس مشاهده عدد 6 موفقیت باشد:

پرتاب پنجم	پرتاب چهارم	پرتاب سوم	پرتاب دوم	پرتاب اول
1	6	4	3	5

پرتاب چهارم	پرتاب چهارم	پرتاب سوم	پرتاب دوم	پرتاب اول
5	2	6	6	3



توزیع پواسن: آزمایشی که تعداد موفقیت ها را در یک فاصله زمانی یا یک ناحیه مشخص را شمارش می‌کند را آزمایش پواسن گویند.

این فاصله زمانی میتواند ثانیه، دقیقه، ساعت، روز و ماه باشد و ناحیه مشخص می‌تواند یک فاصله خطی، مساحت، حجم و ... باشد

- ✓ تعداد تلفن هایی که در یک ساعت به رییس یک شرکت زده می‌شود
- ✓ تعداد غلطهای تایپی در هر صفحه از یک کتاب
- ✓ تعداد زدگی های یک پارچه
- ✓ تعداد تصادفات در یک چهارراه بین ساعت 9 تا 12 ظهر
- ✓ تعداد باکتری ها در یک لیتر آب آلوده

اگر X نشان دهنده تعداد موفقیت ها در یک فاصله زمانی یا ناحیه باشد تابع احتمال آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots .$$

λ متوسط تعداد موفقیت ها

توزیع پواسن را با نماد $X \sim Po(\lambda)$ نمایش می‌دهند و امید ریاضی و واریانس این توزیع برابر است با:

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

توزیع هندسی:

اگر X نشان دهنده تعداد آزمایشات تا رسیدن به اولین موفقیت باشد، آنگاه تابع احتمال آن برابر است با:

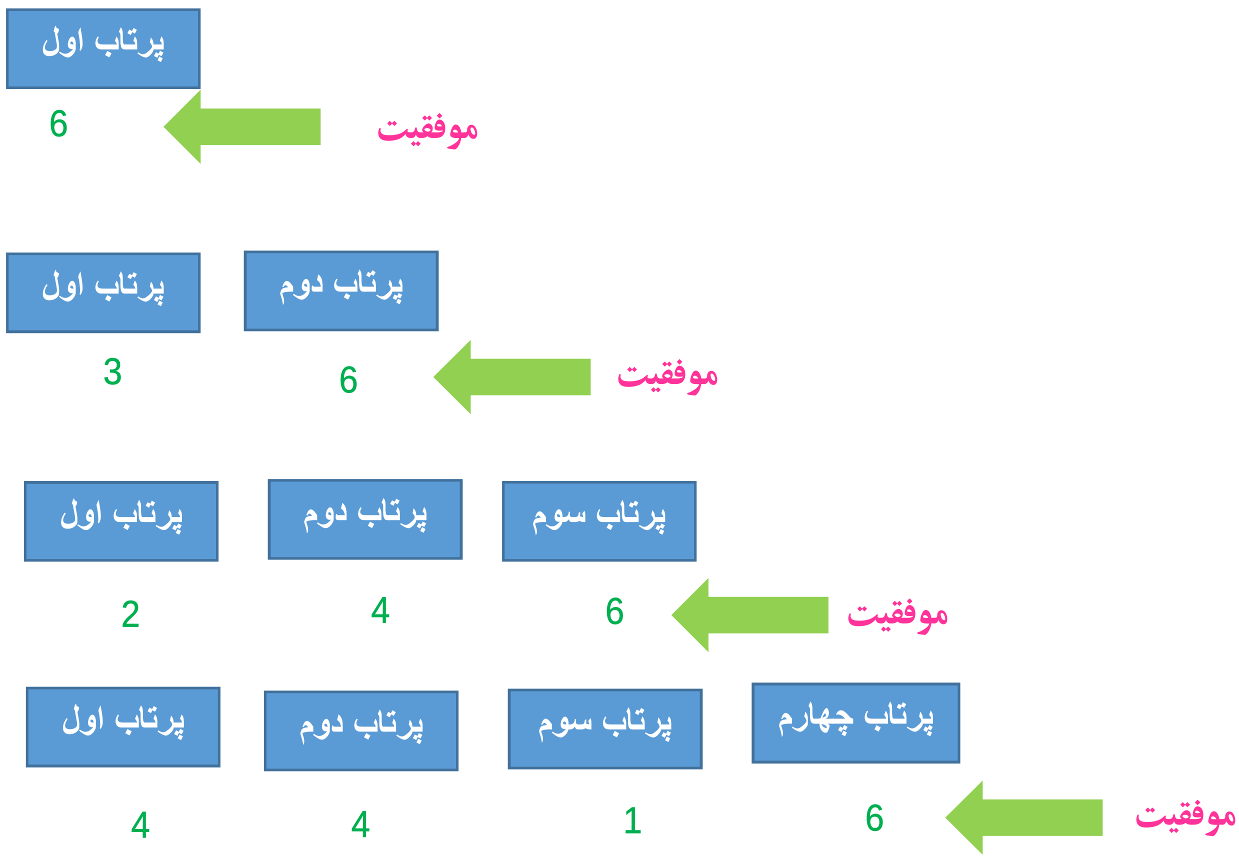
$$P(X = x) = pq^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \dots .$$

p احتمال موفقیت و q احتمال شکست است.

این توزیع را با نماد $X \sim Ge(p)$ نمایش می‌دهند و امید ریاضا و واریانس این توزیع برابر است با:

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad Var(X) = \frac{q}{p^{2}}$$

در پرتاب تاس مشاهده عدد 6 موفقیت باشد:



خلاصه تابع احتمال متغیرهای تصادفی گسسته

توزیع	تابع احتمال	تکیه‌گاه	امیدریاضی	واریانس
دوجمله ای	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$	$0, 1, 2, \dots, n$	np	npq
پواسن	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	$0, 1, 2, 3, 4, \dots$	λ	λ
هندسی	pq^{x-1}	$1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$

مثال1: بسکتبالیستی 5 بار به هدف پرتاب می‌کند. احتمال اینکه در هربار پرتاب به هدف بزنند 0.9 است. مطالوبست:

الف) احتمال اینکه 3 بار پرتابش گل شود.

ب) احتمال اینکه حداقل 4 بار گل بزنند.

ج) انتظار می‌رود در این 5 بار، چند بار به هدف بزنند.

د) واریانس تعداد پرتاب ها را بیابید.

جواب:

$$n = 5 \quad p = 0.9 \quad X \sim bin(5, 0.9)$$

الف)

$$P(X = 3) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{5}{3} 0.9^3 0.1^2 = \frac{5!}{3!\,2!} 0.9^3 0.1^2 = 0.0729$$

ب)

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} 0.9^4 0.1 + \binom{5}{5} 0.9^5$$

ج)

$$E(X) = np = 5 \times 0.9 = 4.5$$

$$Var(X) = npq = 5 \times 0.9 \times 0.1 = 0.45$$

مثال 2: فردی می‌خواهد در امتحان رانندگی شرکت کند. احتمال موفقیت او در امتحان رانندگی برابر 0.7 است. مطلوبست.

الف) احتمال اینکه در بار دوم قبول شود.

ب) اجتمال اینکه در حداکثر در بار 3-ام قبول شود.

ج) انتظار می‌رود در بار چندم قبول شود.

د) واریانس تعداد بارهایی که باید امتحان دهد را محاسبه کنید.

جواب:

$$p = 0.7 \quad X \sim Ge(0.7)$$

الف)

$$P(X = 2) = pq^{x-1} = 0.7 \times 0.3^{2-1} = 0.21$$

ب)

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= 0.7 \times 0.3^{1-1} + 0.7 \times 0.3^{2-1} + 0.7 \times 0.3^{3-1} = 0.7 + 0.21 + 0.063$$

ج)

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.7} = 1.4 \sim 1$$

$$Var(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0.3}{0.7^3} = 0.87$$

مثال3: به طور متوسط تعداد اتومبیل‌های سواری که به رستورانی مراجعه می‌کنند 2 اتومبیل در هر 5 دقیقه است.مطلوبست:

الف) احتمال اینکه در ده دقیقه بیش از 1 اتومبیل مراجعه کند.

ب) احتمال اینکه در 20 دقیقه حداکثر 3 اتومبیل مراجعه کنند.

ج) در 5 دقیقه مراجعه ای نداشته باشیم.

د) انتظار می‌رود در 15 دقیقه چند اتومبیل مراجعه کند.

د) واریانس تعداد مراجعات در 15 دقیقه را محاسبه کنید.

جواب:

$$X \sim Po(2)$$

الف) زمان دراین قسمت 10 دقیقه است. پس:

$$\frac{2}{5} = \frac{\lambda}{10} \implies \lambda = 4$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-4}4^0}{0!} = \frac{1}{e^4}$$

ب) زمان در این قسمت 20 دقیقه است

$$\frac{2}{5} = \frac{\lambda}{20} \implies \lambda = 8$$

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \frac{e^{-8}8^0}{0!} + \frac{e^{-8}8^1}{1!} + \frac{e^{-8}8^2}{2!} + \frac{e^{-8}8^3}{3!}$$

$$= e^{-8}\{1 + 8 + 32 + \frac{256}{3}\}$$

ج)

$$\Rightarrow \quad \lambda = 2$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!} = e^{-2}$$

د) در این قسمت زمان 15 دقیقه است.

$$\frac{2}{5} = \frac{\lambda}{15} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} E(X) = 6 \\ Var(X) = 6 \end{cases}$$

مثال4: به طور متوسط در هر 15 دقیقه، 6 مشتری به پای صندوق پرداخت یک فروشگاه می‌رسند. مطلوبست:

الف) احتمال اینکه در یک دقیقه، هیچ مشتری پای صندوق نیاید.

ب) احتمال اینکه در 30 دقیقه، حداقل 2 مشتری پای صندوق بیایند.

ج) واریانس و امیدریاضی تعداد مشتری ها در 20 دقیقه را به دست آورید.

جواب:

دقیقه 15در هر $\lambda = 6$

الف)

$$\frac{6}{15} = \frac{\lambda}{1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{6}{15} = 0.4$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0.4}0.4^{0}}{0!} = e^{-0.4}$$

ب)

$$\frac{6}{15} = \frac{\lambda}{30} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{6 \times 30}{15} = 12$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}$$

$$= 1 - \left\{\frac{e^{-12}12^{0}}{0!} + \frac{e^{-12}12^{1}}{1!}\right\} = 1 - e^{-12}\{1 + 12\}$$

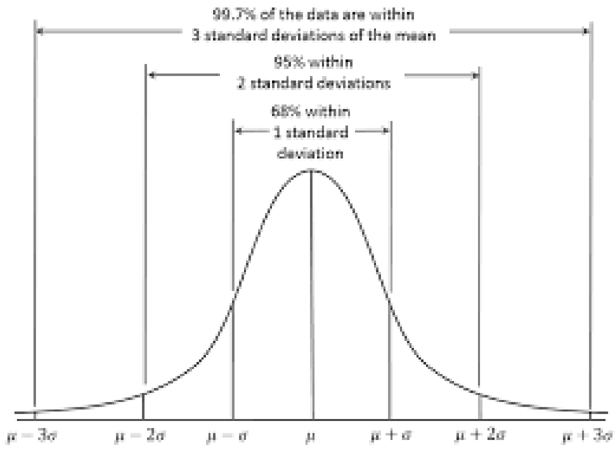
ج)

$$\frac{6}{15}=\frac{\lambda}{20}\ \Longrightarrow\ \lambda=\frac{6\times 20}{15}=8\ \ \rightarrow\ \begin{cases} E(X)=8 \\ Var(X)=8 \end{cases}$$

توزیع نرمال

توزیع نرمال یک منحنی متقارن حول میانگین است و زنگوله‌ای شکل است، روی مقادیر مثبت و منفی تعریف می‌شود و مربوط به متغیرهای پیوسته می‌باشد. در این منحنی، میانه، میانگین و مد با یکدیگر برابرند. این منحنی دارای دو پارامتر به نام‌های میانگین و واریانس است و به ترتیب با μ و σ^2 نمایش داده می‌شود.

- این دو کمیت از این نظر پارامتر توزیع نرمال هستند که براساس مقدار μ و σ^2 شکل این توزیع تغییر می‌کند.
- توجه کنید σ در این توزیع نشان دهنده‌ی انحراف معیار است و از جذر مثبت واریانس به‌دست می‌آید.
- بنابراین، اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 را با نماد $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ نمایش می‌دهند.
- یکی از خواص مهم منحنی نرمال رابطه واحد انحراف معیار توزیع و سطح زیر منحنی است. بدین معنی که سطح زیر منحنی با واحدهای انحراف معیار به نسبت‌های ثابت و مشخصی به شرح زیر است:

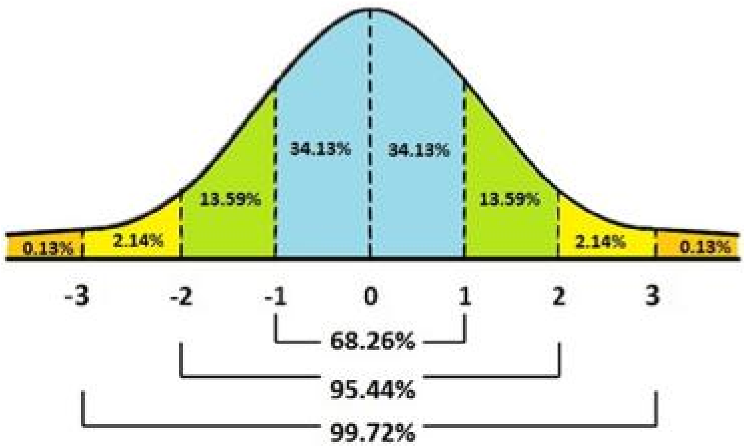


در حقیقت می‌توان گفت:

- 84/12 درصد سطح زیر منحنی کمتر از $\mu+\sigma$ است. به عبارت دیگر، رتبه درصدی نقطه‌ی $\mu+\sigma$ برابر است با 84/12 درصد.

- 15/86 درصد سطح زیر منحنی کمتر از $\mu - \sigma$ است. به عبارت دیگر، رتبه درصدی نقطه‌ی $\mu - \sigma$ برابر است با 15/86 درصد.
- 97/58 درصد سطح زیر منحنی بین $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ است.
- 2/27 درصد سطح زیر منحنی بیشتر از $\mu + 2\sigma$ است.

منحنی نرمال استاندارد: اگر منحنی نرمال دارای میانگین صفر و واریانس یک باشد. آنگاه گوییم این منحنی نرمال استاندارد است. رابطه‌ی سطح زیر منحنی و واحدهای انحراف معیار به صورت زیر خواهد بود:



نکته: همواره رتبه درصدی میانگین برابر 50 است.

برای به‌دست آوردن رتبه درصدی یا سطح زیر منحنی نرمال راحت‌تر است که نمرات استاندارد شوند. برای استاندارد کردن نمرات خام منحنی نرمال به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

مثال : در امتحان درس آمار که توزیع نمره‌های آن نرمال است میانگین برابر 85 و واریانس برابر 64 محاسبه شده است. نمره‌ی خام سه دانشجو برابر 101، 85 و 77 است. رتبه‌درصدی این نمرات را به‌دست آوردید(نمرات را تفسیر کنید.)

$$\mu = 85 \quad \sigma^2 = 64 \rightarrow \sigma = 8$$

$$z = \frac{101 - 85}{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad 0.9772 \times 100 = 97.72$$

$$z = \frac{85 - 85}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.5 \times 100 = 50$$

$$z = \frac{77 - 85}{8} = -1 \quad \Rightarrow \quad 0.1587 \times 100 = 15.87$$

نکته: توجه کنید همواره نمرات استاندارد شده مقادیر معلوم در نمودار به دست نمی‌آیند و باید برای محاسبه رتبه درصدی باید از جدول نرمال استاندارد استفاده کرد.

مثال: میانگین قد دانش‌آموزان یک گروه سنی خاص دارای توزیع نرمال با میانگین 142 و انحراف معیار 5.2 است.

الف) چند درصد دنش‌آموزان قدی بیشتر از 150 دارند.

ب) چند درصد دانش‌آموزان قدی کمتر از 138 دارند.

ج) چند درصد دانش‌اموزان قدی بین 138 تا 150 دارند.

جواب:

$$\mu = 142 \quad \sigma = 5.2$$

الف)

$$z = \frac{150 - 142}{5.2} = 1.54 \Rightarrow 0.9382 \times 100 = 93.82 \qquad 100 - 93.82 = 6.18$$

ب)

$$z = \frac{138 - 142}{5.2} = -0.77 \Rightarrow 0.2206 \times 100 = 22.06$$

ج)

$$93.82 - 22.06 = 71.76$$

مثال: براساس آزمون هوش مشخص شده است که میزان هوش دارای توزیع نرمال با میانگین 100 و واریانس 121 است.

الف) رتبه درصدی نمره 80 چقدر است.

ب) چند درصد افراد نمره‌ای بین 99 تا 105 دارند.

ج) چند درصد افراد نمره‌ای بالاتر از 110 دارند.

د) چند درصد نمره‌ای بین 95 تا میانگین گرفته‌اند.

جواب:

$$\mu = 100 \quad \sigma^2 = 121 \rightarrow \sigma = 11$$

الف)

$$z = \frac{80 - 100}{11} = -1.82 \Rightarrow 0.0344 \times 100 = 3.44$$

ب)

$$z = \frac{99-100}{11} = -0.09 \Rightarrow 0.4641 \times 100 = 46.41$$

$$z = \frac{105-100}{11} = 0.45 \Rightarrow 0.6736 \times 100 = 67.36$$

$$67.36 - 46.41 = 20.95$$

ج)

$$z = \frac{110-100}{11} = 0.91 \Rightarrow 0.8186 \times 100 = 81.86 \quad 100 - 81.86 = 18.14$$

د)

$$z = \frac{95-100}{11} = -0.45 \Rightarrow 0.3264 \times 100 = 32.64$$

$$50 - 32.64 = 17.36$$

نکته: فرض کنید $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، برای به دست آوردن احتمالات توزیع نرمال به طریق زیر عمل می‌کنیم:

$$P(X \le a) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \ge a) = 1 - P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \le X \le b) = P\left(Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

مثال: میزان کارآمدی مدیران دارای توزیع نرمال با میانگین 45 و واریانس 81 است. مطلوبست:

الف) احتمال این‌که میزان کارآمدی یک مدیرحداکثر 35 باشد.

ب) احتمال این‌که میزان کارآمدی یک مدیرحداقل 54 باشد.

ج) احتمال این‌که میزان کارآمدی یک مدیر بین میانگین و 40 باشد.

جواب:

$$\mu = 45 \quad \sigma^2 = 81 \to \sigma = 9$$

الف)

$$z = \frac{35-45}{9} = -1.11 \Rightarrow 0.1335$$

ب)

$$z = \frac{54-45}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad 0.8413$$

ج)

$$z = \frac{40-45}{9} = -0.56 \quad \Rightarrow \quad 0.2877 \quad \Rightarrow \quad 0.5 - 0.2877 = 0.2123$$

مثال:میزان اضطراب 250 نفر دارای توزیع نرمال با میانگین 14/25 و انحراف معیار 2/25 است. مطلوبست:

الف) میزان اضطراب چند نفر کمتر از 15 است.

ب) میزان اضطراب چند نفر حداقل 13 است.

ج) احتمال این که میزان اضطراب فردی بین میانگین و 16 باشد.

د) احتمال این که میزان اضطراب فردی بین 12 تا 13 است.

جواب:

$$n = 250 \quad \mu = 14.25 \quad \sigma^2 = 2.25 \rightarrow \sigma = 1.5$$

الف)

$$z = \frac{15-14.25}{1.5} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad 0.6915 \quad \Rightarrow 1 - 0.6915 = 0.3085$$

$$\Rightarrow \quad 250 \times 0.3085 = 77.125 \sim 77$$

ب)

$$z = \frac{13-14.25}{1.5} = -0.83 \quad \Rightarrow \quad 0.2033 \quad \Rightarrow \quad 0.2033 \times 250 = 50.825 \times 51$$

ج)

$$z = \frac{16-14.25}{1.5} = 1.17 \quad \Rightarrow \quad 0.879 \quad \Rightarrow \quad 0.879 - 0.5 = 0.379$$

د)

$$z = \frac{13-14.25}{1.5} = -0.83 \quad \Rightarrow \quad 0.2033$$

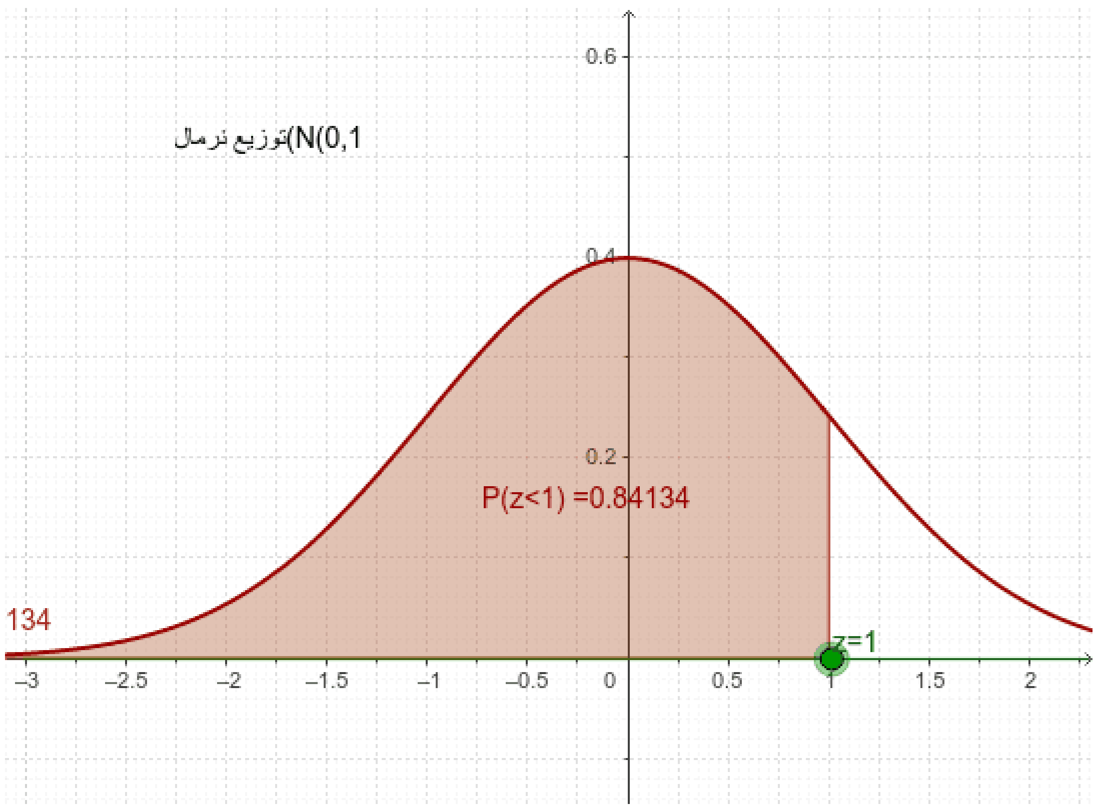
$$z = \frac{12-14.25}{1.5} = -1.5 \quad \Rightarrow \quad 0.0668$$

$$0.2033 - 0.0668 = 0.1365$$

استفاده معکوس از جدول نرمال: در مثال های قبلی، ما به دنبال یافتن احتمال و درصد مورد نظر بودیم. در این‌جا درصد یا مقدار احتمال معلوم است و به دنبال عدد مورد نظر هستیم. پس در این حالت $P(Z \leq a) = \alpha$، α عدد معلومی است و به دنبال مقدار a هستیم. مقدار a را با z_α نمایش داده می‌شود. در واقع z_α عددی است که α درصد داده‌ها کوچکتر از آن هستند. مثلا $z_{0.95}$ عددی است که 95 درصد داده‌ها کوچکتر از آن هستند. توجه شود که z_α نمره استاندارد است و باید نمره‌ی اصلی (نمره خام) را بیابیم که از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$x_\alpha = \sigma z_\alpha + \mu$$

نکته 1-2: اگر بخواهیم عددی را بیابیم که α درصد داده‌ها از آن بزرگتر هستند باید $z_{1-\alpha}$ را بیابیم.



مثال: فرض کنید میزان امید به زندگی افراد شهری دارای توزیع نرمال با میانگین 180 و واریانس 36 باشد.

$$\mu = 180 \quad \sigma^2 = 36 \rightarrow \sigma = 6$$

الف) میزان امید به زندگی 90 درصد افراد این شهر از چه مقداری کمتر است؟

$$\alpha = \frac{90}{100} = 0.9 \quad \rightarrow \quad z_{0.9} = 1.28 \rightarrow \quad x_{0.9} = 6 \times 1.28 + 180 = 187.68$$

ب) میزان امید به زندگی 54/85 درصد افراد این شهر از چه مقداری بیشتر است؟

$$100-85.54=14.46\rightarrow\alpha=\frac{14.46}{100}=0.1446\quad\rightarrow\quad z_{0.1446}=-1.06$$

$$\rightarrow\quad x_{0.1446}=6\times(-1.06)+180=173.64$$

مثال: فرض کنید نمرات دانشجویان یک کلاس 150 نفری دارای توزیع نرمال با میانگین 5/16 و انحراف معیار 5/0 باشد

الف) نمرات 33 درصد نمرات حداکثر چقدر است؟

$$\alpha=\frac{33}{100}=0.33\quad\rightarrow\quad z_{0.33}=-0.44\rightarrow\quad x_{0.33}=0.5\times(-0.44)+16.5=16.28$$

ب) نمرات 2.5 دانشجو حداقل چقدر است؟

$$100-2.5=97.5\rightarrow\alpha=0.975\quad\rightarrow\quad z_{0.975}=1.96\rightarrow\quad x_{0.975}=17.48$$

تمرین: میزان حافظه کودکان شهری دارای توزیع نرمال با میانگین 51 و انحراف معیار 6 است. مطلوبست:

الف) چند درصد کودکان حافظه‌ای بین میانگین و 53 دارند.

ب) اگر قرار باشد 2/49 درصد کودکانی که کمترین نمره را دارند به متخصص معرفی شوند، این نمره چقدر است.

ج) اگر 300 کودک را به طور تصادفی انتخاب کنیم چند کودک حافظه‌ای بیشتر از 48 دارند.

د) احتمال اینکه حافظه یک فرد حداقل 50.5 باشد.