ریاضی پیش دانشگاهی

تابع:

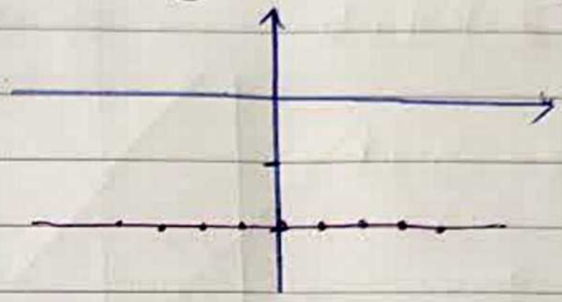
تابع ثابت $f(x)=5$ — تابع چندجمله‌ای $g(x)=x^2-3x+1$

تابع گویا $h(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-3}$ — تابع قدر مطلق $j(x)=|x|$ — تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$

تابع ثابت حالت خاصی از تابع خطی است.

مثال $f(x)=(-2)$ — دامنه $D=R$ — برد $f=\{-2\}$

x	0	1	2	...
$f(x)$	-2	-2	-2	...

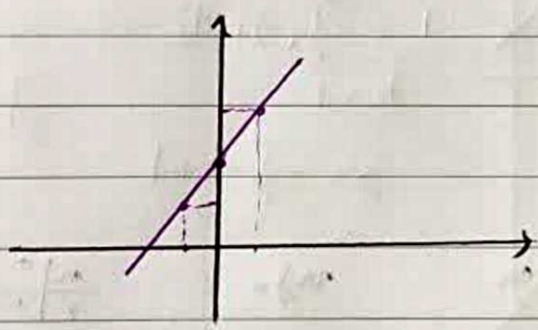


تابع خطی $y=ax+b$

در هر تابع خطی دامنه $D=R$ و برد $f=R$ می باشد.

مثال $y=x+2$

x	-1	0	1
y	1	2	3



مثال: معادله خط گذرنده از نمودار زیر را بنویسید.

شیب خط — عرض از مبدا

$y=ax+b$

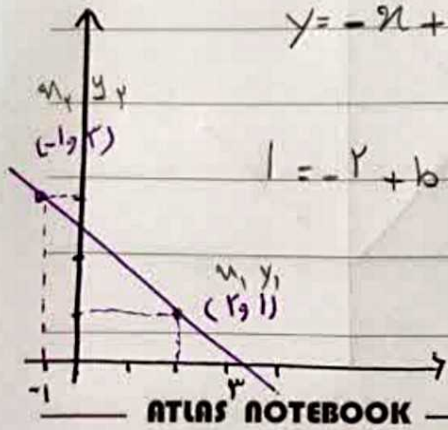
شیب خط a = $\frac{\text{تفاضل } y \text{ ها}}{\text{تفاضل } x \text{ ها}}$

$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-1}{-1-1}=-1$

$\boxed{a=-1}$

$y=-x+b$ با استفاده از یکی از نقاط b را پیدا می‌کنیم

$1=-2+b \Rightarrow b=3$



معادله خط $\Rightarrow y=-x+3$

خطوط موازی : دو خط را موازی گوییم هرگاه دارای شیب خط برابر باشند

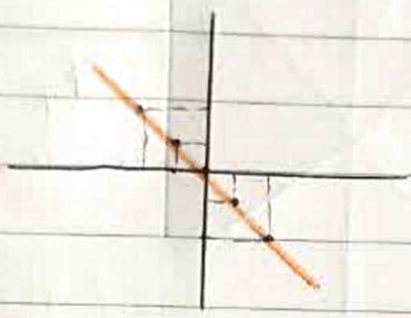
خطوط متعامد : دو خط را عمود برهم گوییم هرگاه شیب خط آنها قرینه و معکوس هم باشند

مثال : معادله خطی را بنویسید که با خط $y=-x+2$ موازی باشد و از مبدأ عبور کند

$y=ax+b$ $\quad y=-x+b$ $\quad 0=-0+b$ $\quad b=0$

$y=-x$

x	-1	0	1	2	-2
y	1	0	-1	-2	2



مثال: معادله خطی را بنویسید که بر خط $y=3x-1$ عمود بوده و از نقطه (۰،۱) عبور کند

قرینه $3 \Rightarrow -3$

معکوس $3 \Rightarrow \frac{1}{3}$

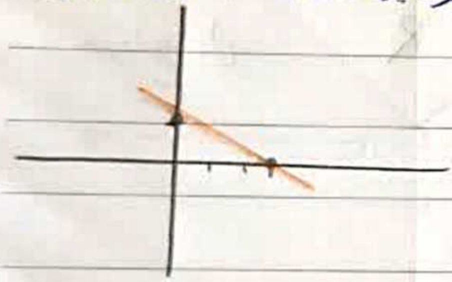
$y=-\frac{1}{3}x+b$

$1=-\frac{1}{3}(0)+b$

$b=1$

$y=-\frac{1}{3}x+1$

x	0	3
y	1	0



تابع قدر مطلق

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

$y=x$

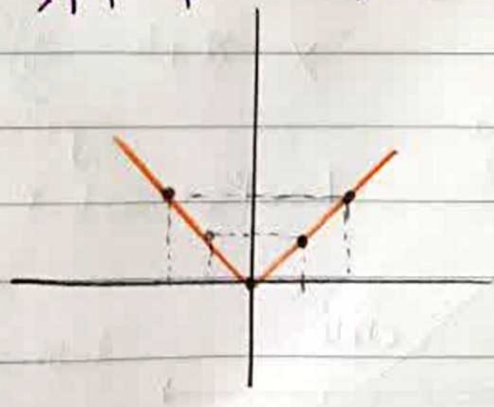
x	0	1	2
y	0	1	2

$y=-x$

x	-1	-2
y	1	2

دامنه $D=R$

برد f = مقادیر yها



$|-3|=-(-3)=3$

$|0|=0$

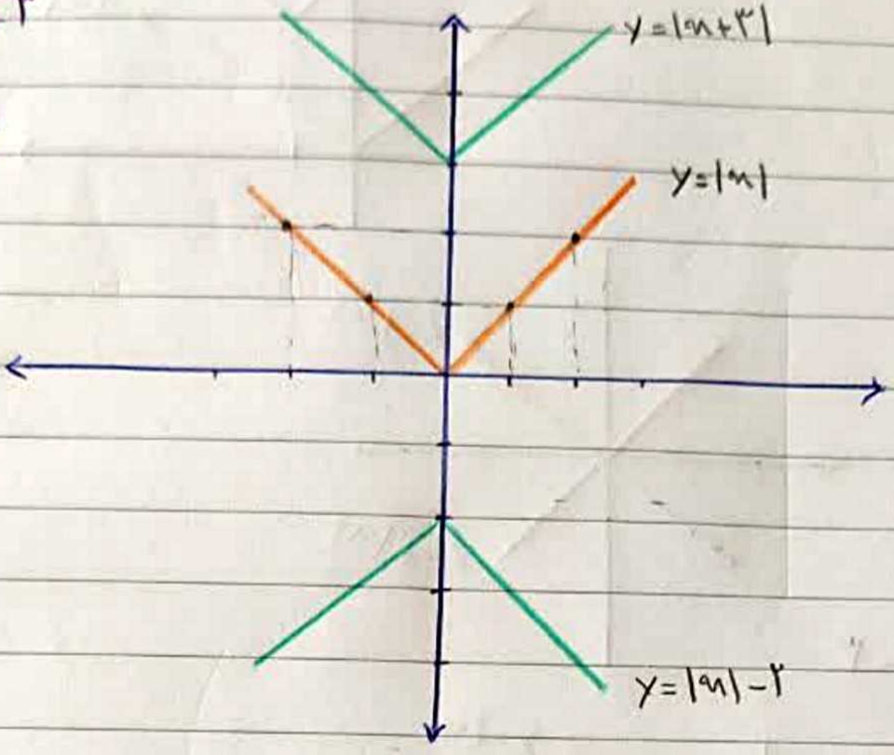
$|1.2|=1.2$

انتقال نمودار ها

عدد خارج از قدر مطلق به اضافه یا منها می شود که روی محور y ها جابجا می شود.

$y = |x| + 3$

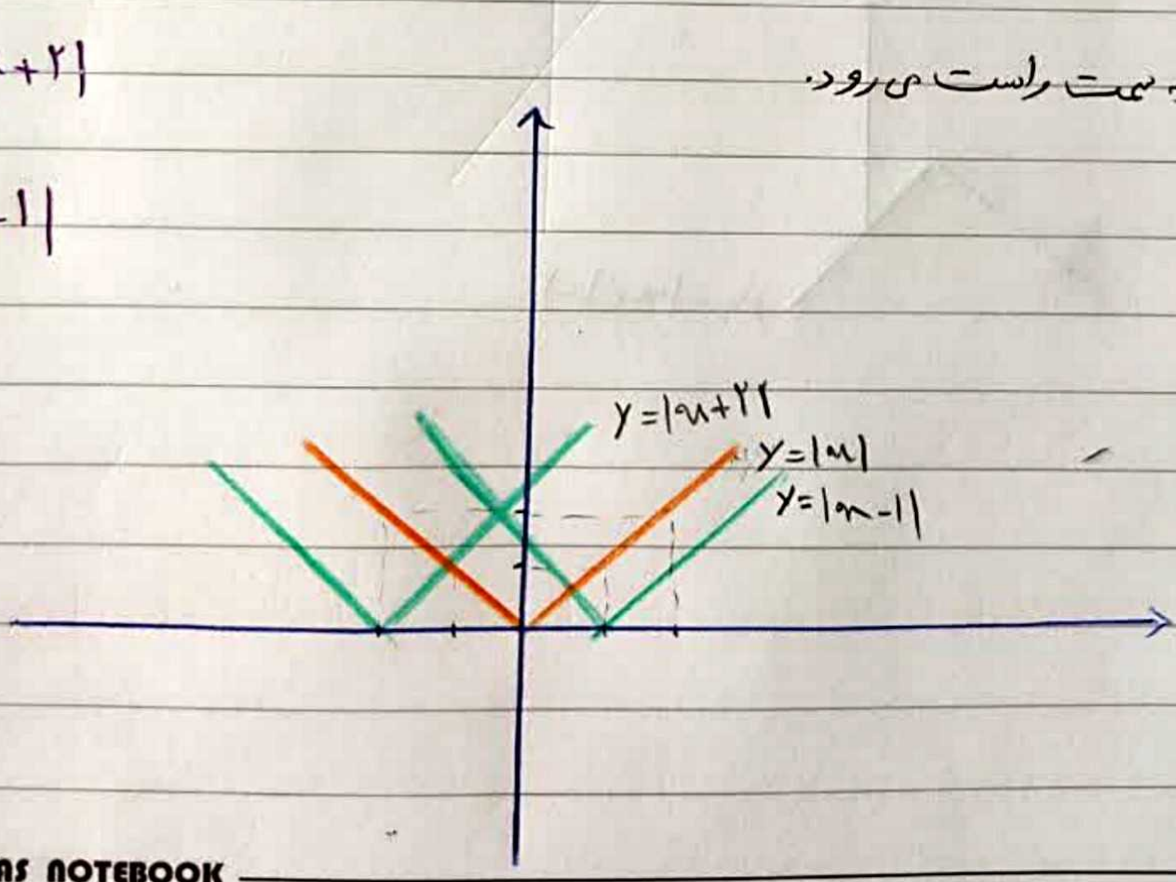
$y = |x| - 2$



نکته: اگر عدد داخل قدر مطلق باشد اگر به اضافه (+) باشد به سمت چپ و اگر منها (-) باشد به سمت راست می رود.

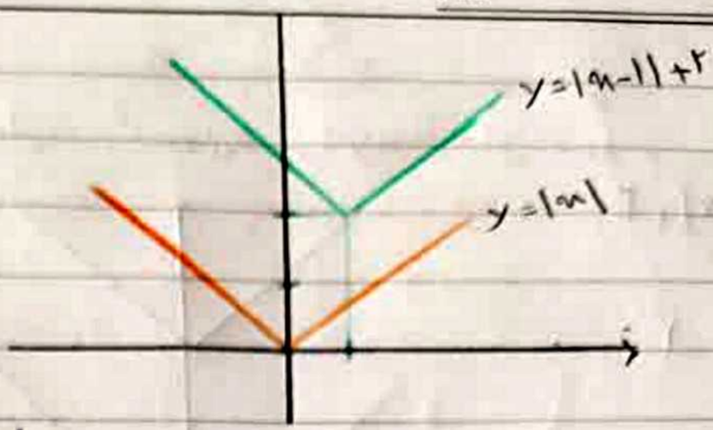
$y = |x+2|$

$y = |x-1|$

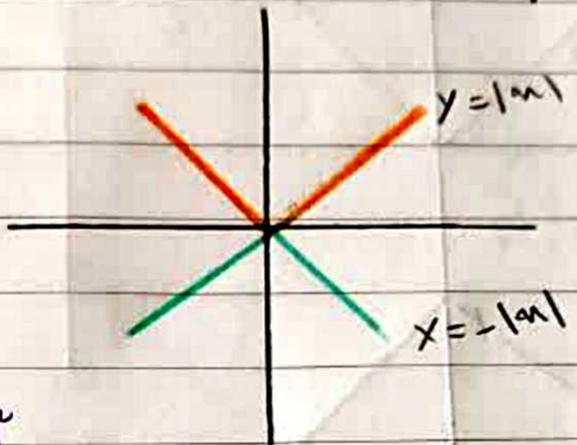


Date:

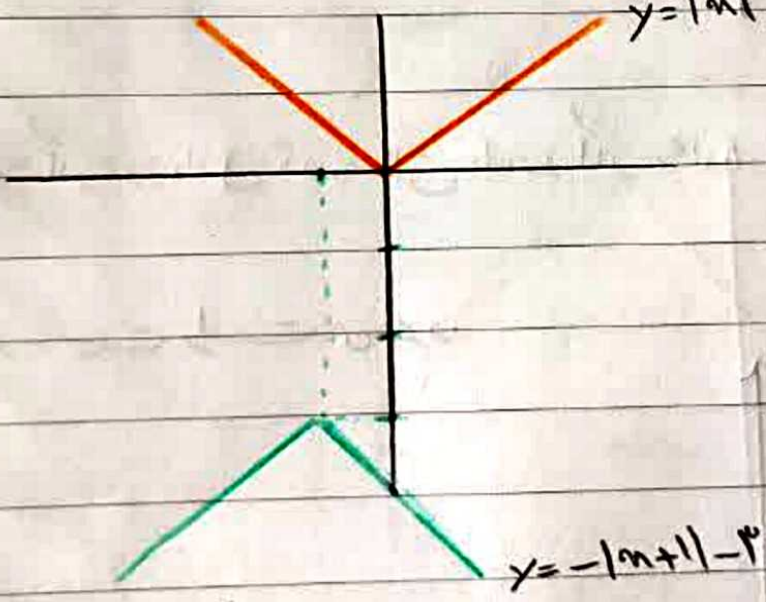
y = |x - 1| + ۲



y = -|x|



y = -|x+1| - ۳



I ماتریس همانی = $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ حاصل قطر اصلی = ۱ بقیه درایه ها ۰

قطر اصلی

$\begin{bmatrix} & & 0 \\ & \diagup & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$ قطر فرعی

در ماتریس مربعی : تعداد سطر و ستون برابر است.

ماتریس $\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}$ دترمینان $\begin{vmatrix} \ \end{vmatrix}$

دترمینان
اگر ماتریس ۲x۲ باشد حاصلضرب قطر اصلی - حاصلضرب قطر فرعی خواهد بود.

مثال $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (15) = -16$

اگر جای سطر و ستون عوض گردد علامت تغییر خواهد کرد $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - (-1) = 16$

دترمینان ماتریس ۳x۳

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -1 \times (-1)^{1+3} (-1\times 0 - 2\times 1) = 2 \\ 0 \times (-1)^{2+3} (1\times -1 - 0\times 1) = 0 \\ 0 \times (-1)^{3+3} (1\times 2 - 0\times 0) = 0 \end{matrix} \Big\rangle 2$$

وارون ماتریس: فقط برای ماتریسهای مربعی پیدا می‌شود. $A \times A^{-1} = I \rightarrow$ ماتریس همانی

آیا هر ماتریسی وارون پذیر است؟ خیر، ماتریسی وارون پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد

Date:

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

m: سطر

n: ستون

جمع ماتریس

در جمع ماتریس ها هر دو ماتریس باید دارای سطر و ستون یکسان باشند در غیر اینصورت نمی توان آنها را جمع کرد.

مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس

در ضرب ماتریس تعداد ستون اول باید با تعداد سطر دومی برابر باشد.

$$m \times n \cdot n \times k \Longrightarrow$$

حاصل ضرب ماتریس $m \times k$ خواهد بود

مثال

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0-1 & 0+1+0 & 0+0+2 \\ 1+0+0 & -1+2+0 & 0+0+0 \\ -1+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

R = سطر

پیدا کردن وارون ماتریس

ابتدا باید دترمینال حساب کنیم بعد

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

سطر

$$-1 \times R_1 + R_3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = -1 \times R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] = R_3 + R_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] =$$

$$-2 \times R_3 + R_1 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow$$ وارون ماتریس

جواب معادله ها

حل دستگاه

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{ضرایب } x & \text{ضرایب } y & \text{ضرایب } z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow -1 \times R_1 + R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{-2 \times R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3} \times R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_3}$$

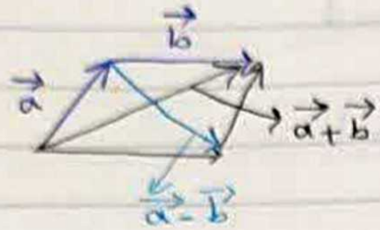
Date: ( )

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۵}{۳} \end{array}\right] \begin{array}{l} \longrightarrow x \\ \longrightarrow y \\ \longrightarrow z \end{array}$$

Date:

$\vec{a}-\vec{b} = (x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3) = (x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3)$

بردار $\vec{a}$ را رسم می‌کنیم از انتهای بردار $\vec{a}$ بردار $-\vec{b}$ را رسم می‌کنیم برداری که از ابتدای $\vec{a}$ به انتهای $-\vec{b}$ رسم می‌کنیم همان بردار $\vec{a}-\vec{b}$ خواهد بود



در متوازی الاضلاع:

قطر بزرگ : جمع بردارها

قطر کوچک : تفاضل بردارها

ضرب داخلی دو بردار

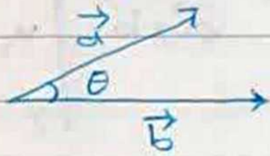
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1, x_2, x_3)\cdot(y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

نتیجه جواب یک عدد خواهد بود.

مثال $(1,0,2)\cdot(3,0,0) = (3+0+0) = 3$

اندازه بردار:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$



فرمول ضرب داخلی

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\cdot|b|\times\cos\theta$$

θ = زاویه بین دو بردار

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(1,1,0)$ و $\vec{b}=(-2,2,1)$ را بیابید.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\cdot|b| = (1,1,0)\cdot(-2,2,1) = -2+2+0 = 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |a|\cdot|b|\cos\theta = 0 \qquad \cos\theta = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

صفر نیست　　صفر

$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$

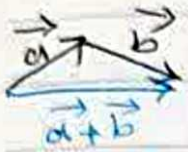
جمع بردارها

$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

هر بردار هم راستا دارد هم جهت $\vec{a}$ $\vec{b}$

در شکل : جمع برداری :

بردار دوم را از انتهای بردار اول رسم می‌کنیم برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای



بردار دوم وصل می‌کند بردار برآیند نامیده می‌شود

ضرب اسکالر در بردار

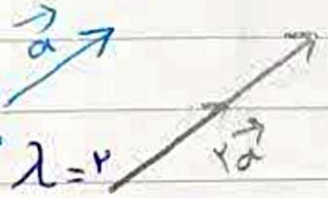
$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

مثال $3(1, 0, -2) = (3, 0, -6)$

فرض کنید λ در $\vec{a}$ ضرب شده باشد.

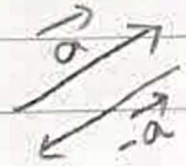
① اگر λ مثبت باشد بردار $\lambda\vec{a}$ در جهت و هم راستا با بردار $\vec{a}$ خواهد بود.

مثال $\lambda = 2$



② اگر λ منفی باشد بردار $\lambda\vec{a}$ در خلاف جهت $\vec{a}$ رسم خواهد شد

مثال $\lambda = -1$



بردار $-\vec{a}$ را قرینه بردار $\vec{a}$ می‌نامیم.

بردار صفر باشد اندازه صفر است و برعکس - اگر اندازه صفر باشد بردار صفر است

بردار یکه:

برداری که اندازه آن یک باشد را بردار یکه می نامند.

$\vec{i}=(1,0,0) \qquad |\vec{i}|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$

$\vec{j}=(0,1,0) \qquad |\vec{j}|=\sqrt{0^2+1^2+0^2}=1$

$\vec{k}=(0,0,1) \qquad |\vec{k}|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$

در مثال ماتریس $2\times2) \to$ حاصلضرب قطر اصلی - حاصلضرب قطر فرعی)

ضرب خارجی دو بردار:

حاصلضرب خارجی برداری است عمود بر صفحه شامل دو بردار

$\vec{a}=(x_1,x_2,x_3)$

$\vec{b}=(y_1,y_2,y_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=\vec{i}(x_2y_3-x_3y_2)$$

$$-\vec{j}(x_1y_3-y_1x_3)$$

$$k(x_1y_2-x_2y_1)$$

ضرب خارجی دو بردار: برداری است عمود بر صفحه شامل دو بردار

$\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$

Date: ( )

مثال

$\vec{a}=(1,-2,0)$

$\vec{b}=(0,1,2)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{matrix}\vec{i}(-4-0)\\ -\vec{j}(2-0)\\ k(1-0)\end{matrix}=(-4,-2,1)$$

معادله صفحه :

اگر صفحه P شامل نقطه $\vec{a}(x_1, x_2, x_3)$ باشد و بردار $\vec{N}(y_1, y_2, y_3)$ بر آن عمود باشد معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید. x یک نقطه دلخواه روی صفحه P است.

$$(y_1, y_2, y_3).(x_1-a_1, x_2-a_2, x_3-a_3)=$$

$$y_1(x_1-a_1)+y_2(x_2-a_2)+y_3(x_3-a_3)$$

نکته: دو بردار بر هم عمودند اگر و فقط اگر ضرب داخلی آنها صفر باشد.

مثال: معادله صفحه گذرنده از نقطه $(1,-1,2)$ را بنویسید که بردار $\vec{N}=(0,1,-1)$ بر آن عمود است.

$$0(x_1-1)+1(x_2+1)-1(x_3-2)=0$$

$$x_2+1-x_3+2=0 \qquad x_2-x_3=-3$$

یکشنبه

Date: 1401-2-10

ریاضی عمومی ۱

تابع: تابع قدر مطلق $j(x) = |x-3|$ تابع ثابت $f(x) = 5$

تابع جزء صحیح $e(x) = [x-3]$ تابع چند جمله ای $g(x) = x^2 - 3x + 8$

تابع sin و cos $K(x) = x^2 - \sin x - 2\cos x$ تابع گویا $h(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}$

و ترکیبی از این توابع

دامنه D ← مقادیری که x می توانند بگیرد

برد R ← مجموعه تمام خروجی های تابع

در تابع ثابت دامنه تمام اعداد حقیقی (R) و برد تک عضوی می باشد

مثال $f(x) = 5$ $\quad D_f = R \quad R_f = \{5\}$

در تابع چند جمله ای دامنه اعداد حقیقی R و برد را نمی توان دقیقاً تعیین کرد.

مثال $g(x) = x^2 - 3x + 8$ $\quad D_g = R \quad R_g =$ نمی توان دقیقاً تعیین کرد

در تابع گویا دامنه تمام اعداد حقیقی منهای ریشه های مخرج می باشد.

$h(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}$ $\quad \dfrac{\text{چند جمله ای}}{\text{چند جمله ای}}$ $\quad D_h = R -$ ریشه های مخرج

در تابع رادیکالی دامنه محدوده به دست آمده از جواب رادیکال برای x

$\sqrt[n]{\bigcirc} \geq 0$ اگر n زوج ← زیر رادیکال مثبت باشد

R ← اگر n فرد $\quad \Leftarrow D$

R: تمام اعداد حقیقی

تابع کسری (تقسیم توابع) $\frac{f(x)}{g(x)}$

$D = (D_f \cap D_g) -$ ریشه‌های مخرج

مثال: دامنه تابع داده شده را به دست آورید.

$f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x+2}$

$\sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 \geq 0 \quad D = x \geq 2$

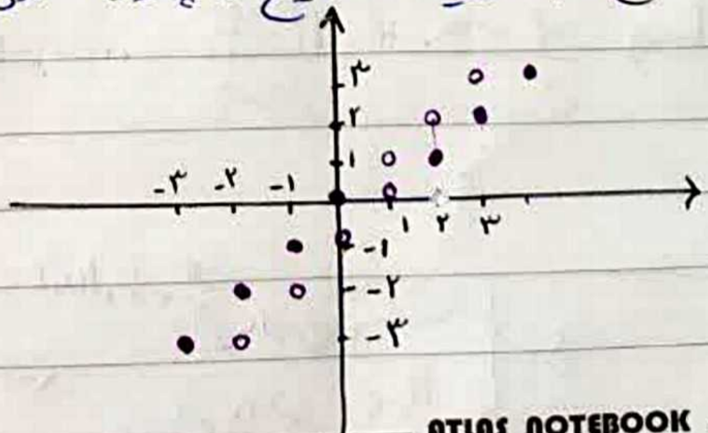
$\underbrace{x^2-3x+2=0}_{\Downarrow \; D=R} \quad (x-2)(x-1)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$ ریشه‌های مخرج

$D = \{x \in R \mid x \geq 2\} \cap R = \{x \in R \mid x \geq 2\} - \{1,2\} = \{x \in R / x > 2\}$

تابع جزء صحیح $[x]$ $\quad$ Z اعداد صحیح = f برد $\quad$ $D = R$ دامنه

هر عددی مابین دو عدد صحیح متوالی است $\quad n < x < n+1$

جزء صحیح: بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن عدد است.



$1 \leq 1 < 2 \quad [1] = 1$

$1 \leq 1.5 < 2 \quad [1.5] = 1$

$-4 < -3.2 < -3 \quad [-3.2] = -4$

$[\sqrt{5}] = [2.\ldots] = 2$

$[\pi] = [3.14] = 3$

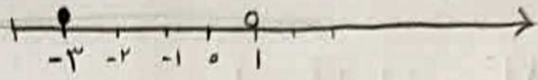
مثال دامنه تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{[x-1]}$$

صورت $D = x+3 \geq 0 \quad x \geq -3$ ①

$D = \{x \in R / x \geq -3\} \cap R = \{x \geq -3\} - \{1\}$

مخرج $D = R$ ②



پیدا کردن ریشه مخرج $[x-1] = 0$

$0 \leq x < 1$

$+1 \quad 0 \leq x-1 < 1 \quad x-1+1 \quad 1+1$

$1 \leq x < 2$

$D_g = [-3, 1) \cup [2, +\infty)$

حد تابع

در چندجمله‌ای جایگذاری می‌کنیم

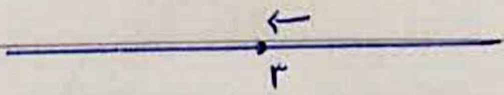
$$\lim_{x \to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

حد چپ و حد راست.

اگر تابعی حد چپ دارد و حد راست دارد و حد چپ برابر حد راست است پس تابع حد دارد. عکس نقیض: تابع حد ندارد. (مثلاً تابع حد چپ و حد راست دارد ولی باهم برابر نیستند تابع حد ندارد و یا مثلاً حد چپ و راست برابر هم نباشد تابع حد ندارد.

مثال

$$\lim_{x \to 3} [x] =$$



$[2.9] = 2 \qquad [3.1] = 3$

$[2.99] = 2 \qquad [3.2] = 3$

Date: ( )

حد راست $\lim_{x \to 3^+} [x] = 3$

چون حد چپ و راست باهم برابر نیست تابع حد ندارد

حد چپ $\lim_{x \to 3^-} [x] = 2$

تابع جزء صحیح در قسمت های ناصحیح حد دارد در قسمت های صحیح باید حد آن بررسی شود. مثال ←

$\lim_{x \to 1} [x-2] = [1-2] = -1$

چون جواب عدد صحیح آمد سراغ حد چپ و راست می رویم

$\lim_{x \to 1^+} [x-2] = -1$ $\qquad 1/2 - 2 = -0/8 \qquad [-0/8] = -1$

حد چپ و راست نابرابر است پس تابع حد ندارد

$\lim_{x \to 1^-} [x-2] = -2$ $\qquad 0/9 - 2 = -1/1 \qquad [-1/1] = -2$

$\lim_{x \to 0} [x^2] = 0$

$\lim_{x \to 0^+} [x^2] = 0$ $\qquad (0/1)^2 = (0/01) = \lim [x^2] = 0$

$\Rightarrow$ تابع در نقطه صفر حد دارد.

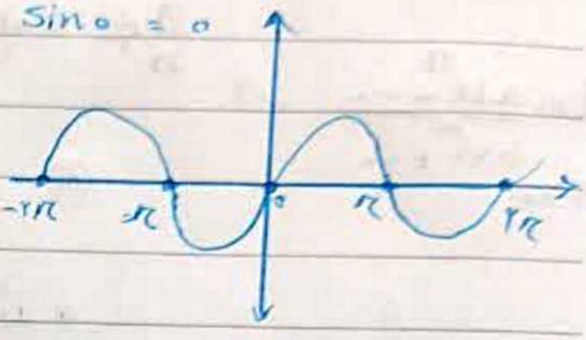
$\lim_{x \to 0^-} [x^2] = 0$ $\qquad (-0/1)^2 = (0/01) = \lim [x^2] = 0$

$$\lim_{x\to\pi} \sin[x-\pi]$$

$\sin(x-\pi)$

$\sin(\pi-\pi)=0$

$\sin 0 = 0$



$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin(x-\pi)] = \lim_{x\to\pi^+}[\sin(0)^+] = 0$$

$$\lim_{x\to\pi^-}[\sin(x-\pi)] = \lim[\sin(0^-)] = -1$$

$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin(x-\pi)] \neq \lim_{x\to\pi^-}[\sin(x-\pi)]$$

تابع حد ندارد (حد وجود ندارد)

حد مبهم

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \frac{0}{1-3+2} = \frac{0}{0} = \bullet$$

حد مبهم

اگر صورت ۰ مطلق باشد جواب ۰

اگر مخرج ۰ مطلق باشد جواب تعریف نشده

است ولی در lim حالت مبهم دارد

در حد مبهم باید رفع ابهام شود یعنی عامل ابهام را در صورت و مخرج حذف کنیم

برای پیدا کردن عامل ابهام چون $x\to 1$ پس ← $x-1$ می‌شه که →

عامل ابهام را از بین ببریم.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(x-1)(x-2)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

Date: ( )

حد در بی‌نهایت: یعنی x در بی‌نهایت

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3x+1}{-3x^2+4x+12} = -\frac{1}{3}$$

در تابع کسری $\lim_{x \to \infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^n+\cdots}{bx^m+\cdots}$$

اگر درجه صورت و مخرج برابر باشد $m=n \Rightarrow \frac{a}{b}$

درجه صورت بزرگتر از مخرج باشد ∞

درجه مخرج بزرگتر از صورت باشد 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^+)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{(0^-)^2} = +\infty$$

وقتی به توان ۲ می‌رسد مثبت می‌شود

پیوستگی: تابع f را در نقطه a پیوسته گوییم

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

هرگاه f سه شرط زیر را داشته باشد.

۱. f در a تعریف شده باشد $f(a)$

۲. f در a حد داشته باشد $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود باشد.

۳. مقدار تابع در نقطه a با مقدار تابع f در نقطه a برابر باشد.

Date: ( )

مثال : پیوستگی تابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+1 & x>1 \\ 2 & x=1 \\ -2x+1 & x<1 \end{cases}$$

شرط ۱ : $f(1)=2$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim(x^2-3x+1) = 1-3+1=-1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim(-2x+1) = -2+1=-1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$ شرط ۲ تابع حد دارد

$$\lim f(x) = -1 \neq f(1)=2$$

تابع در نقطه $x=1$ پیوسته نیست

مثال : نقاط ناپیوستگی تابع زیر را در بازه داده شده بیابید .

$g(x)=[x] \longrightarrow$ روی بازهٔ $(-1, 2]$

تابع جزء صحیح

حد چپ در است [۲و۱و۰] و مقدار تابع بررسی می شود اگر برابر بود تابع پیوسته است در غیر اینصورت نه

با حد راست کاری نداریم و حد چپ را باید پیدا کنیم

$g(x)=[x]$

$\lim_{x\to 0^+}[x]=0 \neq \lim_{x\to 0^-}[x]=-1$

در $x=0$ پیوسته نیست

$\lim_{x\to 1^+}[x]=1 \neq \lim_{x\to 1^-}[x]=0$

در $x=1$ پیوسته نیست

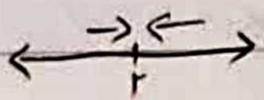
$\lim_{x\to 2^-}[x]=1 \neq [2]=2$

پیوستگی راست دارد

تابع در $x=2$ پیوستگی ندارد پس در $x=2$ پیوسته نیست

اگر مقدار تابع حد راست داشته باشد پیوستگی راست دارد

اگر حد چپ داشته باشد پیوستگی چپ دارد



توابع چندجمله‌ای و sin و cos همه جا پیوسته و قدر مطلق پیوسته

جزء صحیح در نقاط صحیح پیوسته نیست.

اگر تابعی پیوسته باشد چنانچه مخرج صفر نشود در جمع و تفریق و ضرب و تقسیم هم پیوسته خواهد بود.

نقاط ناپیوستگی

۱- تابع ثابت است پس همه جا پیوسته است.

$\frac{1}{\sin x}$

$\sin x$ همه جا پیوسته است

ریشه های مخرج را پیدا می کنیم

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \,,\, k \in Z$

چون که در این نقاط ناپیوسته است.

مشتق:

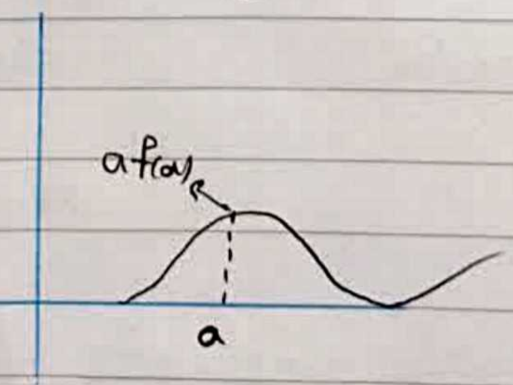
همان شیب خط مماس است در نقطه داده شده بر نمودار تابع

تعریف: فرض کنید f در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد اگر حد زیر موجود و برابر عدد L باشد

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$$

در اینصورت L را مشتق تابع f در نقطه a گوییم و آن را با $f'(a)$ یا $\frac{df}{dx}(a)$ نشان می دهیم.

از نظر هندسی مشتق در نقطه a برای تابع f برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه a



مشتق در چندجمله‌ای ها

$$(ax^n + bx^m + \dots)' = anx^{n-1} + bmx^{m-1} + \dots$$

مثال $(3x^2 - x + 2)' = 6x - 1$

عدد ثابت مشتق صفر دارد یعنی عدد ثابت مشتق ندارد

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = \cos\tan^2 x$

$(e^x)' = e^x$ تابع نمایی

$(f_1 f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_2' \cdot f_1$ فرمول مشتق برای ضرب توابع

$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' \cdot f_2 - f_2' f_1}{(f_2)^2}$ فرمول مشتق برای تقسیم توابع

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

$$\tan x = \frac{\cos x \sin x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\sec^2 x$ یا

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$

$$\cot x = \frac{-\sin x . \sin x - \cos x . \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-\overbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}^{1}}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = \cos^2 x$$

Date: ( )

جمع توابع

مثال $f(x) = \sin x - x^4 + 4x - e^x$

$f'(x) = \cos x - 4x^3 + 4 - e^x$

مثال $g(x) = 2x \cdot \cos x - e^x \sin x + 4$

$g'(x) = 2\cos x + \underbrace{(-\sin x \times 2x)}_{-2x\sin x} - e^x \sin x - e^x \cos x$

جلسه سوم	ریاضی عمومی	۱۴۰۲/۲/۲۴	یکشنبه

مشتق

ترکیب توابع :

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$f(x) = \sin x$

$g(x) = 3x^2 - 7x + 1$

$f\circ g(x) = f(g(x)) = \sin(3x^2 - 7x + 1)$

مشتق برای ترکیب توابع:

قضیه : فرض کنید g در نقطه x_0 دارای مشتق باشد و f نیز در $g(x_0)$ مشتق پذیر

ATLAS NOTEBOOK

باشد در این صورت تابع $f\circ g$ در نقطه x_0 مشتق پذیر است و مشتق

آن از رابطه زیر به دست می آید:

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

مثال: مشتق توابع زیر را به دست آورید:

1) $\sin(x^2 - 7x) = \cos(x^2 - 7x) \times (2x - 7)$

2) $e^{3x^3-8} + \cos(\sqrt{x}) = 9x^2 \times e^{(3x^3-8)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$

3) $f^{n}(x)' = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x) \leftarrow$ فرمول

مثال $((x^2 - 3x + 8)^{10})' = 10(x^2 - 3x + 8)^9 \times (2x - 3)$

$$(\sqrt[n]{x^m})' = (x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1}$$

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

کاربرد مشتق:

شیب خط مماس و قائم:

- مثال: معادله خط مماس و قائم بر نمودار $f(x) = x^2 - 3$ در نقطه $(1 \text{ و } -2)$ به دست آورید.

$f'(x) = 2x \qquad f'(1) = 2(1) = 2 \longrightarrow$ شیب خط مماس

$y = 2x + b \qquad -2 = 2(1) + b$

$b = -4$

معادله خط مماس $y = 2x - 4$

Date: (۱ $f(x)=x^2-3$

خط قائم : عمود بر خط مماس نقطه (۱ و ۲-)

در مثال قبلی شیب خط قائم $-\frac{1}{2}$ می‌شود و معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$y=-\frac{1}{2}x+b$ $\quad -2=-\frac{1}{2}(1)+b \Rightarrow b=-\frac{3}{2}$

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

صعودی و نزولی بودن تابع

هرگاه مشتق مثبت باشد $f'>0$ تابع صعودی

و هرگاه مشتق منفی باشد $f'<0$ تابع نزولی است.

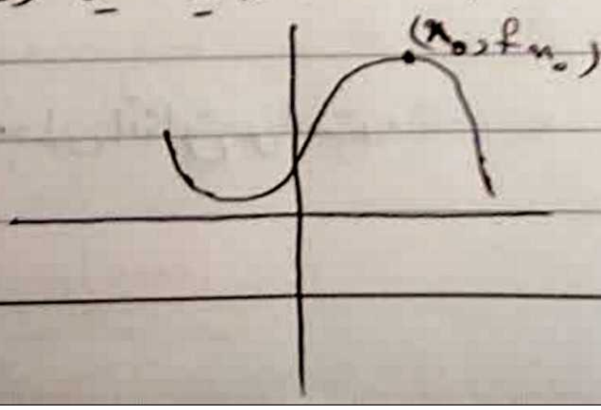
ماکسیمم و مینیمم تابع:

تعریف: تابع در نقطه x_0 ماکسیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی مانند (a,b) از x_0 وجود داشته باشد که f در این همسایگی تعریف شده باشد.

$\forall x\in(a,b) \quad f(x)\leq f(x_0)$

تابع در نقطه x_0 مینیمم نسبی دارد هرگاه یک همسایگی مانند (a,b) از x_0 وجود داشته باشد که f در این همسایگی تعریف شده باشد.

$\forall x\in(a,b) \quad f(x)\geq f(x_0)$



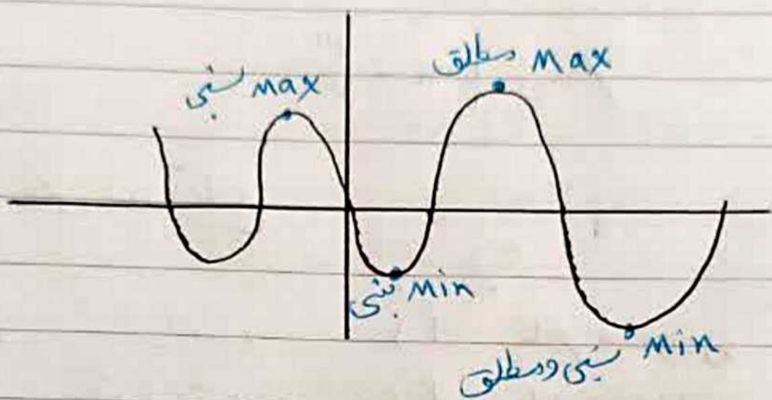
Date: ( )

تابع در نقطه x_0 ماکسیمم مطلق دارد هرگاه

$\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(x_0)$

تابع در نقطه x_0 مینیمم مطلق دارد هرگاه

$\forall x \in D_f \quad f(x) \geq f(x_0)$



نقطه x_0 را اکسترمم نسبی گوییم هرگاه min یا max نسبی باشد

نقطه x_0 را اکسترمم مطلق گوییم هرگاه min یا max مطلق باشد

قضیه: فرض کنید f در نقطه x_0 دارای اکسترمم نسبی باشد اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد آنگاه $f'(x_0)=0$

تعریف: نقاطی را که در آن تابع مشتق ندارد یا مشتق تابع برابر صفر باشد را نقاط بحرانی تابع می گوییم.

نکته: اکسترممهای نسبی تابع در نقاط بحرانی اتفاق می افتد.

Date: ( )

قضیه آزمون مشتق اول: فرض کنید x_0 یک نقطه بحرانی برای تابع f باشد در این صورت x_0 یک نقطه اکسترمم است هرگاه f' در اطراف آن تغییر علامت داشته باشد.

		x_0	
f'	+ ↗		− ↘
	صعودی		نزولی

max نسبی

		x_0	
f'	− ↘		+ ↗
	نزولی		صعودی

min نسبی

		x_0	
f'	$\pm$		$\pm$

x_0 نقطه اکسترمم نسبی نیست

مثال:

مقادیر اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ را در صورت وجود بیابید.

$$f'(x)=\frac{0(x-1)-1(1)}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

① مشتق

② جاهایی که مشتق صفر است یا وجود ندارد $x=1$ $x-1=0$

③ تعیین علامت مشتق

x		1	
f'	−		−

مشتق وجود ندارد

تابع اکسترمم نسبی ندارد.

اگر به جای x ها یک را بگذاریم چون صفر یا هر عدد به توان ۲ مثبت است.

صورت	−	−
مخرج	+	+
f'	−	−

Date: ( )

ریاضی عمومی

انتگرال

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$

$x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c \Rightarrow \frac{x^4}{4} + c$

$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{4x^3}{4} = x^3$

$\left(\frac{x^4}{4} - \underbrace{2}_{\text{مشتق}}\right)' = \frac{4x^3}{4} + 0 = x^3$

به جای ۲ هر عددی بگذاریم چون که صفر است جواب x^3 خواهد بود

2) $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

مثال $\ln(x^2 - 3x)' = \frac{2x-3}{x^2-3x}$

$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

تابعی برحسب x

3) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

4) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

۵) $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$

۶) $\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$

مثال $\int \sin(-x+4)\,dx = -\frac{1}{-1}\cos(-x+4) = \cos(-x+4)+c$

۷) $\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u|+c$

۸) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\overbrace{-\sin x}^{u'}}{\underbrace{-\cos x}_{u}}\,dx = -\ln|\cos x|+c$

۹) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|+c$

$(\tan x)' = \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{\sec^2 x} = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x+1$

۱۰) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x+c$

۱۱) $\int \overbrace{\csc^2 x}^{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx = -\cot x+c$

۱۲) $\int e^x\,dx = e^x+c$

Date: / /

(۱۳) $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

در انتگرال جمع و تفریق را می‌توان جدا کرد ولی در ضرب و تقسیم نمی‌توان چنین کرد.

(۱۴) $\int f\,dx + \int g\,dx = \int (f \pm g)\,dx$

(۱۵) $\int \lambda f\,dx = \lambda \int f\,dx \quad (\lambda \in R$

هر عدد با انتگرال ضرب شده باشد می‌توان آن را از انتگرال خارج کرد.

مثال $\int 3x^2 - \frac{\sqrt{x}}{7} + \sin(4x-1)\,dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{1}{7}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$

$- \frac{1}{4}\cos(4x-1) + c = x^3 - \frac{2}{21}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\cos(4x-1) + c$

اگر مشتق مخرج در صورت ظاهر شود $x^2 - 4x + 8 = u$

$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx = \quad 2x - 4 = u'$

$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| = \ln|x^2 - 4x + 8| + c$

روش های انتگرال گیری

جز به جز

$\int u\,dv$

$(uv)' = du\,v + u\,dv$

$\int u\,dv = \int (uv)' - \int v\,du$

 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{dv} dx$ $\quad v = \int dv = \int e^x dx = e^x$

$\boxed{du = 1dx}$

$$\int x e^x dx = x \times e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$\int x \sin x dx$$

$$-\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$$

		مشتق	انتگرال	
+	u	x	$\sin x$	dv
−	du	1	$-\cos x$	du
+				
−				

علامت‌گذاری یک درمیان + بعد مشتق

سپس ① مورب بعد ② مستقیم

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx$$

$$x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x + c$$

+	$\ln x$	1
−	$\frac{u'}{u} = \frac{1}{x}$	x

$$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال $\int \sin^3 x \cos x dx = \int u' u^3 dx = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$

$\int u' e^u dx = e^u$

مثال $\int (2x+3)\, e^{x^2-3x+7}\, dx = e^{x^2-3x+7} + c$

u

انتگرال معین

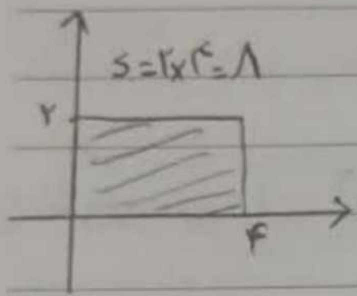
$\int_a^b f(x)dx = \overset{\text{تابع اولیه}}{F}(b) - F(a)$

$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx =$

$-\cos \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(\frac{\pi}{2}) - 1 - \cos(\pi) = 0 + (-1) = -1$

محاسبه مساحت با استفاده از انتگرال

مساحت محدود بین تابع $y = -x^2+1$ و محور xها را بدست آورید.

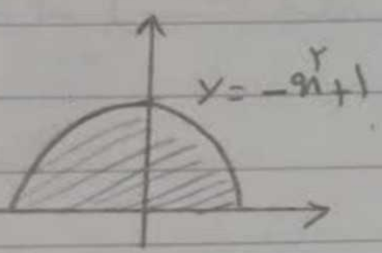


طول $= dx$

عرض $= -x^2+1$

$-x^2+1=0$

$-x^2=-1 \quad x=1$



$\int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx = -\frac{x^3}{3} + 1x \Big|_{-1}^{1} =$

$-\frac{3}{3} + 1 - \frac{(-(-1))^3}{3} - 1 = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 =$

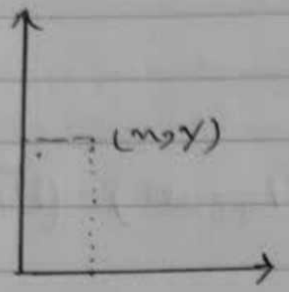
$2 - \frac{2}{3}$

ریاضی پیش

Date: 1402.2.19

اعداد مختلط : $\mathbb{C}$

$x^2+1=0 \Longrightarrow x^2=-1$ در R جواب ندارد



$\mathbb{C}=\{(x,y) : x,y \in R\}$

جمع اعداد مختلط

$(x,y) \oplus (a,b) = (x+a, y+b)$

عضو خنثی جمع $(x,y) \oplus (0,0) = (x+0, y+0) = (x,y)$

جمع خاصیت جابجایی دارد

در $R \Longrightarrow x+y=y+x$

در اعداد مختلط $\mathbb{C}$ $= (x,y) \oplus (a,b) = (a,b) + (x,y)$

عضو قرینه $-(x,y)=(-x,-y)$

تفاضل اعداد مختلط

$(x,y)-(a,b)=(x,y)+(-a,-b)=(x-a, y-b)$

ضرب اعداد مختلط

$(x,y) \odot (a,b) = (ax-by, bx+ay)$

قرارداد: هر عدد حقیقی x در $\mathbb{C}$ را به صورت $(x,0)$ نمایش می‌دهیم.

$x \odot (a,b) = (x,0) \odot (a,b)$

$= (xa - 0b , xb + 0a) = (xa , xb)$

$2 \odot (-1,7) = (-2,14)$

$(3,5) \odot (1,-2) = (3\times1 - (5(-2)) , 3\times(-2) + (5\times1)) = (13,-1)$

$(0,1) \odot (0,1) = (0\times0 - 1\times1 , 0\times1 + 1\times0) = (-1,0)$

$i^2 = -1$ $\quad$ $(0,1)$ را با نماد i نمایش می دهیم $\quad$ نمادگذاری

$x\cdot(1,0) + y(0,1) = (x,0) + (0,y) = (x,y)$

$x + yi = (x,y)$ $\quad$ نمایش دوم برای اعداد مختلط

$(x+iy)\cdot(a+ib) = \underline{ax} + \underline{ixb} + \underline{iay} + \underbrace{i^2}_{-1}yb =$

$ax - by , xb + ay$

مثال $(2+3i) \odot (1-2i) = (\overset{2}{2\times1} - \overset{+6}{(-6)} , \overset{-4i+3i}{2\times(-2i) + 3i\times1})$

$(8,-1)$

$(-1+3i) \odot (2-4i) = (\overset{-2}{-1\times2} - \overset{+12}{3(-4)} , \overset{+4}{(-1)(-4i)} + \overset{6}{3\times2})$

$(10,10)$

$$(a,b)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$(a,b)\odot(a,b)^{-1} = (1,0)$$

عضو خنثی ضرب

$$(a,b)\odot(1,0) = (a\times 1 - \cancel{b\times 0},\ \cancel{a\times 0} + b\times 1) = (a,b)$$

تقسیم اعداد مختلط

$$\frac{a+ib}{x+iy} = (a+ib)\odot(x+iy)^{-1}$$

مثال $\dfrac{1+3i}{2-i}\cdot\dfrac{(2+i)}{(2+i)} = \dfrac{(2-3)+i(6+1)}{2^2+1^2} = \dfrac{-1+7i}{5}$

مزدوج

$a+ib$ ، $a-ib$

قسمت حقیقی

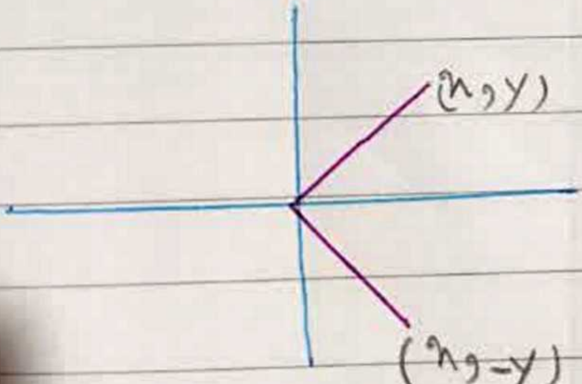
قسمت موهومی

اندازه یا قدر مطلق :

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} = (x+iy)\odot(x-iy) = x^2+y^2 = |x^2+y^2|$$

$$(x+iy)\odot\overline{(x+iy)}$$

علامت مزدوج



$$\sqrt{(y-0)^2+(x-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

مثال: $\dfrac{|1+2i|}{3-i}\times\dfrac{3+i}{3+i} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot(3+i)}{9+1} = \dfrac{3\sqrt{5}+i\sqrt{5}}{10}$

$|1+2i| = \sqrt{5}$

$|2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$3i-5+i-8i+4 = (-1, -4i)$