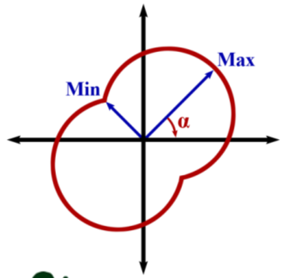
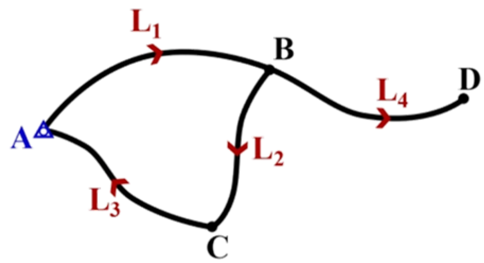
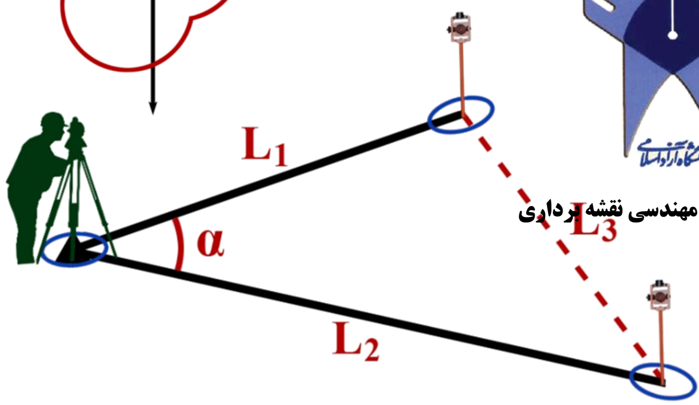
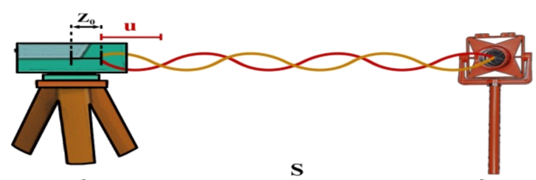


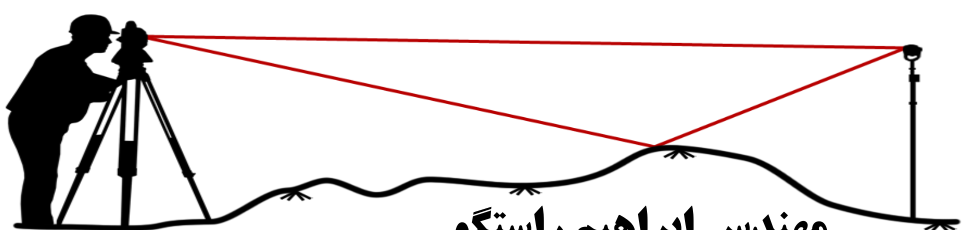


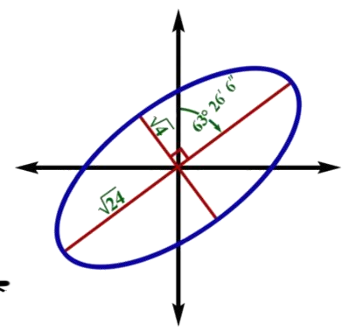


مجتمع فنی مهندسی نقشه برداری

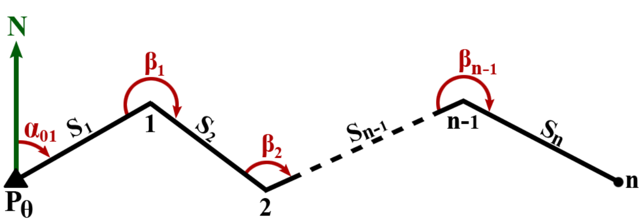


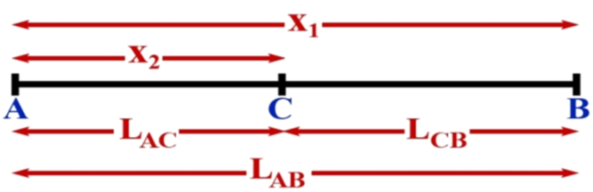
جزوه درس ژئودتیک و تحلیل شبکه

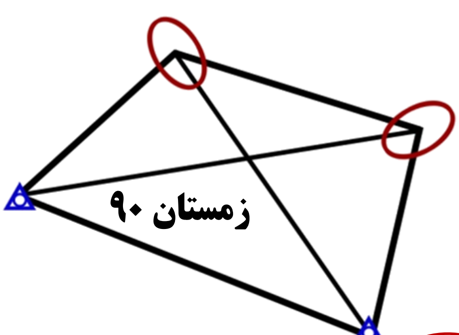




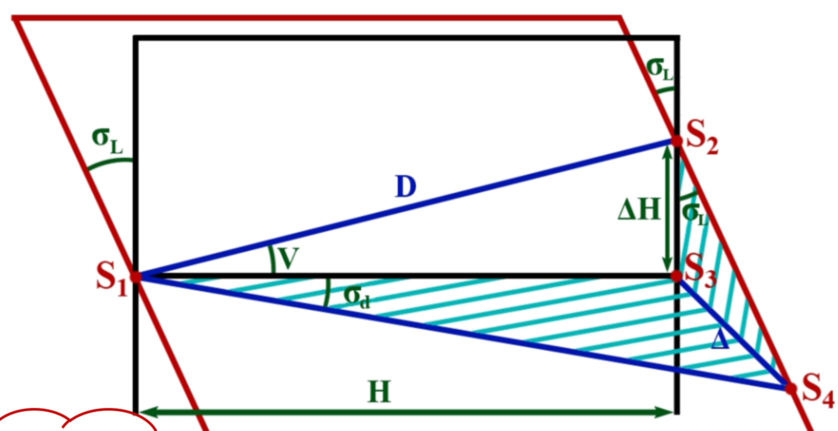
مهندس ابراهیم راستگو







زمستان ۹۰



آخرین به‌روزرسانی
۹۵/۱۱/۲۶

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به بهترین‌های زندگانی‌ام

پدر

و

مادر

مهربانم

فهرست

فصل اول

انتشار خطاها

هنگامی که در مورد خطاها در ژئودتیک و سرشکنی بحث می‌شود، منظور خطاهای تصادفی است. در این درس، هر جا صحبت از دقت باشد، به انحراف معیار اشاره شده و با علامت σ نشان داده می‌شود .

انحراف معیار جزر واریانس است و خود واریانس کمیتی برای بیان مقدار تکرار شوندگی کمیت‌ها است. بنابراین، فقط می‌توان خطاهای مشاهده‌هایی که به صورت تکراری اندازه گیری شده‌اند تشخیص داد.

قانون انتشار خطاها

اگر فرض شود، مقادیر $(x_1 x_2,\ldots,x_n)$ مستقل از هم و همگی دارای انحراف معیارهای $\sigma_{x_1},\sigma_{x_2},\ldots,\sigma_{x_n}$ باشند، می‌توان دقت کمیتی مانند f را که به آن‌ها وابسته است را به صورت زیر بدست آورد:

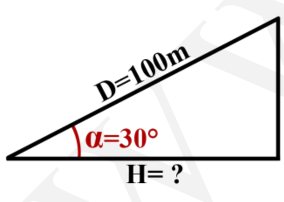
$$\sigma_f^2=(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2\sigma_{X_1}^2+(\frac{\partial f}{\partial x_2})^2\sigma_{X_2}^2+\ldots.+(\frac{\partial f}{\partial x_n})^2\sigma_{X_n}^2$$

حال اگر فرض شود σ_{x_i} مجهول است (مثلاً σ_{x_2})، با داشتن σ_f می‌توان σ_{x_2} را به صورت زیر بدست آورد:

$$\sigma_{X_2}^2=\frac{\left[\sigma_f^2-(\frac{\partial f}{\partial x_1})^2\sigma_{X_1}^2-\ldots-(\frac{\partial f}{\partial x_n})^2\sigma_{X_n}^2\right]}{(\frac{\partial f}{\partial x_2})^2}$$

دقت شود که برای محاسبه مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ به مقادیر اولیه x_i نیاز است.

مثال: در شکل زیر دقت کمیت H را بدست آورید. (α و D مستقل هستند)



$$\sigma_D=10^{mm}=0.01^m \qquad \sigma_\alpha=20'' \Rightarrow \frac{20}{206265}\,rad$$

$$\sigma_H=?$$

جواب: ابتدا باید مدل ریاضی برای مجهول ها نوشته شود.

$$H=D\times\cos(\alpha)$$

حال باید نسبت به مقادیری که دارای خطا هستند (σدارند) مشتق گرفته شود.

$$\sigma_H^2=(\frac{\partial H}{\partial D})^2\sigma_D^2+(\frac{\partial H}{\partial\alpha})^2\sigma_\alpha^2\Rightarrow\sigma_H^2=(\cos\alpha)^2\sigma_D^2+(-D\times\sin\alpha)^2\sigma_\alpha^2$$

$$\sigma_H^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(0.01)^2+(-100\times\frac{1}{2})^2(\frac{20}{206265})^2\Rightarrow\sigma H=9.92^{mm}$$

در مثال پیش اگر هدف رسیدن به دقت 15^{mm} در H باشد، آیا می‌توان از یک طولیاب با دقت $10+10^{ppm}$ استفاده کرد؟

$$\sigma_\alpha=20'' \qquad\qquad 15^{mm}\rightarrow 0.015^{m}$$

$$\sigma_H^2=(\cos\alpha)^2\sigma_D^2+(-D\times\sin\alpha)^2\sigma_\alpha^2$$

$$\Rightarrow 0.015^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\sigma_D^2+\left(-100\times\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{20}{206265}\right)^2$$

$$\sigma_D=0.016^{m}\ \Rightarrow\ 16^{mm}\rightarrow\sigma_D=10^{mm}+x$$

حال باید دید به وسیله این طولیاب به چه دقتی در D می‌رسیم.

$$\frac{1}{1000000}=\frac{X}{100000}\Rightarrow X=1\Rightarrow\sigma_D=10^{mm}+1^{mm}\ \Rightarrow\ \sigma_D=11^{mm}$$

چون ۱۶ > ۱۱ است، پس می‌توان از آن استفاده کرد.

این نشان می‌دهد که اگر طول با دقت 16^{mm} اندازه گیری شود، به دقت مطلوب در H می‌رسیم.

نکته: PPM[1]واحد نمایش دقت نسبی طولیاب‌ها می‌باشد که بیان کننده‌ی بخشی از یک میلیون قسمت است.

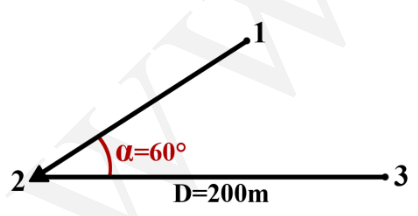
PPM برای بیان دقت طولیاب‌ها، از دو بخش تشکیل می‌شود: یک بخش نسبی و یک بخش مطلق.

به صورت نسبی تغییر می‌کند	همیشه ثابت است

$10+10^{ppm}$

با چنین تحلیل‌های ساده‌ای در مورد دقت مورد انتظار، می‌توان وسیله مناسب را انتخاب کرد تا از بروز هزینه اضافی جلوگیری شود.

مثال: در شبکه زیر موقعیت نقطه 3 با چه وقتی بدست خواهد آمد.



$$\sigma_{X2}=10^{mm} \qquad \sigma_{y2}=15^{mm}$$

$$\sigma_D=9^{mm} \qquad \sigma_\alpha=60$$

$$\sigma_{P_3}^2=\sigma_{X_3}^2+\sigma_{Y_3}^2$$

$\sigma_{P_3}^2$: خطای موقعیت نقطه شماره ۳ — $\sigma_{X_3}^2$: خطا در راستای X در نقطه شماره ۳

$\sigma_{Y_3}^2$: خطا در راستای y در نقطه شماره ۳

[1]Part Per Million

$$x_3 = x_2 + D\sin(\alpha)$$
$$y_3 = y_2 + D\cos(\alpha)$$

حال باید نسبت به D, y, x و α مشتق گرفته شود.

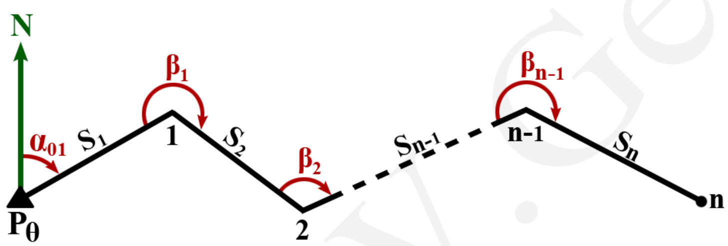
$$1)\ \sigma^2_{X_3} = (1)^2\sigma^2_{X_2} + (\sin\alpha)^2\sigma^2_D + (D\cos(\alpha))^2\sigma^2_\alpha$$
$$2)\ \sigma^2_{Y_3} = (1)^2\sigma^2_{Y_2} + (\cos\alpha)^2\sigma^2_D + (-D\sin(\alpha))^2\sigma^2_\alpha$$

رابطه 1 و 2 را با هم جمع کرده و رابطه 3 بدست می‌آید.

$$3)\ \sigma^2_{p_3} = (\sigma^2_{X_2} + \sigma^2_{Y_2}) + \sigma^2_D + D\sigma^2_\alpha$$
$$\Rightarrow\ \sigma^2_{X_3} = (1)^2\sigma^2_{X_2} + (\sin\alpha)^2\sigma^2_D + (D\cos(\alpha))^2\sigma^2_\alpha$$
$$\Rightarrow \sigma^2_{p3} = (0.01^2 + 0.015^2) + (0.009)^2 + 200^2(\frac{60}{206265})^2$$
$$\Rightarrow \sigma^2_{p3} = 3.79\times10^{-3} \Rightarrow \sigma_{p3} = 0.062^m = 62^{mm}$$

بررسی انتشار خطا در پیمایش

فرض کنید پیمایشی بر اساس شکل زیر وجود دارد، خطای موقعیت نقطه n را بدست آورید.



در ضمن می‌دانیم:

$$\sigma_{p_0}\ ,\ \sigma_{s_1}\ ,\ \sigma_{s_2}\ ,\ldots,\ \sigma_{sn}\ ,\ \sigma_{B_2}\ ,\ldots,\ \sigma_{B_{n-1}}\ ,\ \sigma_{\alpha_{01}}$$
$$\sigma^2_P = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$

σ^2_P: خطای موقعیت نقطه P σ^2_X: خطا در راستای X در نقطه P σ^2_Y: خطا در راستای y در نقطه P

برای این کار ابتدا باید رابطه‌های زیر را نوشته و سپس با دیفرانسیل گرفتن از آن، رابطه‌های نهایی بدست می‌آید.

$$x_n = x_0 + s_1\sin(\alpha_{01}) + s_2\sin(\alpha_{12}) + \ldots \Rightarrow \sigma^2_{X_n}$$
$$y_n = y_0 + s_1\cos(\alpha_{01}) + s_2\cos(\alpha_{12}) + \ldots \Rightarrow \sigma^2_{y_n}$$

رابطه نهایی را با رعایت موردهای زیر به راحتی می‌توان بدست آورد.

۱- خطای نقطه شروع عیناً روی نقطه n منتقل می‌شود.

۲- خطای هر طول به طور مجزا روی نقطه n منتقل می‌شود.

۳- خطای مربوط به زاویه‌ها و ژیزمان‌ها، مشابه هم بوده و به صورت زیر خواهد بود:

ابتدا ژیزمان هر ضلع را بدست آورده و به روش زیر عمل می‌شود.

$$\begin{cases} \alpha_{01} = \alpha_{01} \\ \alpha_{12} = \alpha_{01} + B_1 + \pi \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{n-2,n-1} = \alpha_{01} + B_1 + B_2 + \dots + B_{n-2} + (n-2)\pi \\ \alpha_{n-1,n} = \alpha_{01} + B_1 + B_2 + \dots + B_{n-2} + B_{n-1} + (n-1)\pi \end{cases}$$

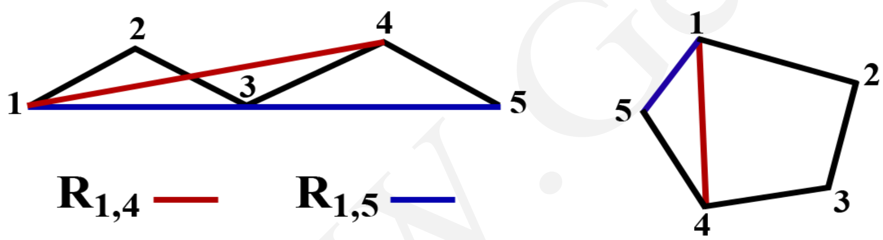
$$\sigma_{P_n}^2 = \sigma_{P_0}^2 + (\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2 \dots + \sigma_{S_n}^2) + (R_{0n}^2\, \sigma_{\alpha_{01}}^2) + (R_{1,n}^2\, \sigma_{B_1}^2 + R_{2,n}^2 \sigma_{B_2}^2 + \dots + R_{n-2,n}^2 \sigma_{B_{n-2}}^2 R_{n-1,n}^2 \sigma_{B_{n-1}}^2)$$

R_{0n}^2: طول از نقطه ۰ تا n به صورت مستقیم

$R_{1,n}^2$: طول از نقطه ۱ تا n به صورت مستقیم

$$\sigma_{P_n}^2 = \sigma_{P_0}^2 + (\sum_{i=1}^{n} \sigma_{S_i}^2) + R_{0,n}^2 \sigma_{\alpha_{01}}^2 + (\sum_{i=1}^{n-1} R_{i,n}^2 \sigma_{B_i}^2)$$

R: طول مستقیم از یک نقطه به نقطه دیگر هم برای پیمایش باز و هم برای پیمایش بسته مانند شکل زیر.



در پیمایش بسته $R_{0,n}$ برابر صفر است.

خطای بست زاویه ای : σ_α در اثر خطا در زاویه‌ها منتقل می‌شود.

$$\sigma_\alpha = \bar{L}\sqrt{\frac{n}{3}}\sigma_\beta$$

خطای بست طولی : σ_L در اثر خطا در طول منتقل می‌شود.

$$\sigma_L = \sqrt{n}\,\sigma_S$$

خطای بست موضعی: σ_f

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_\alpha^2}$$

یک رابطه‌ی قدیمی :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)2(n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n+1))2n+1)}{6}$$

اگر رابطه باز شود خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \frac{2n^3-3n^2+n}{6} \cong \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3}$$

با یک تقریب فقط از این بخش ($\frac{2n^3}{6}$) رابطه استفاده و از بخش $-3n^2+n$ صرف نظر می‌شود.

برای اثبات رابطه‌های یاد شده، باید فرض‌های زیر در نظر گرفته شود:

۱۸۰ درجه هستند (خط صاف هستند) β کل زاویه‌های $\beta_1=\beta_2=....\beta_{n-1}=\beta\cong 180^\circ$

$$\sigma_{\beta_1}=\sigma_{\beta_2}=...=\sigma_{\beta_{n-1}}=\sigma_\beta \quad , \quad R_{i,n}=(n-i)S$$

$$\sigma_{P_0}=0 \quad , \quad \sigma_{\alpha_{01}}=0 \quad , \quad S_1=S_2=....=S_n=S$$

$$\sigma_{S_1}=\sigma_{S_2}=...=\sigma_{S_{n-1}}=\sigma_S$$

حال بر اساس رابطه‌ی قبلی داریم:

$$\sigma_{P_n}^2=\sigma_{P_0}^2+(\sigma_{S_1}^2+\sigma_{S_2}^2+...+\sigma_{S_n}^2)+(R_{0,n}^2\sigma_{\alpha_{01}}^2)+(R_{1,n}^2\sigma_{\beta1}^2+R_{2,n}^2\sigma_{\beta2}^2+....+R_{n-1,n}^2\sigma_{\beta n-1}^2)$$

$$\sigma_{P_n}^2=0+\underbrace{n\sigma_S{}^2}_{\sigma_L^2}+0+\underbrace{[(n-1)^2S^2+(n-2)^2S^2+....+1^2S^2]\sigma_\beta^2}_{\sigma_\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_L^2=n\sigma_S{}^2 \Rightarrow \sigma_L=\sqrt{n}\sigma_S$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha^2=\frac{n^3}{3}S^2\sigma_\beta^2 \Rightarrow \sigma_\alpha^2=\underbrace{(n\times S)}_{\bar{L}}{}^2\frac{n}{3}\sigma_\beta^2 \Rightarrow \sigma_\alpha^2=\bar{L}^2\frac{n}{3}\sigma_\beta^2 \Rightarrow \sigma_\alpha^2=\bar{L}\sqrt{\frac{n}{3}}\sigma_\beta$$

مثال: کدام یک از روش‌های پیمایش زیر را ترجیح می‌دهید؟

σ_{p_0}

$S_1=S$

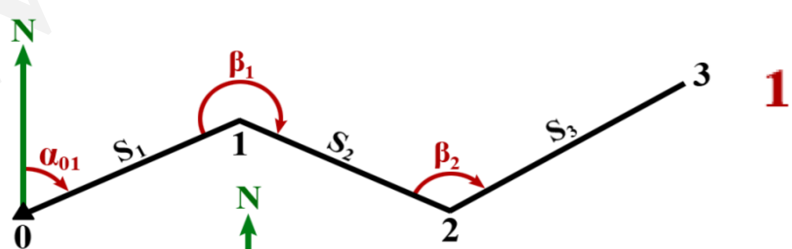
$S_2=2S$

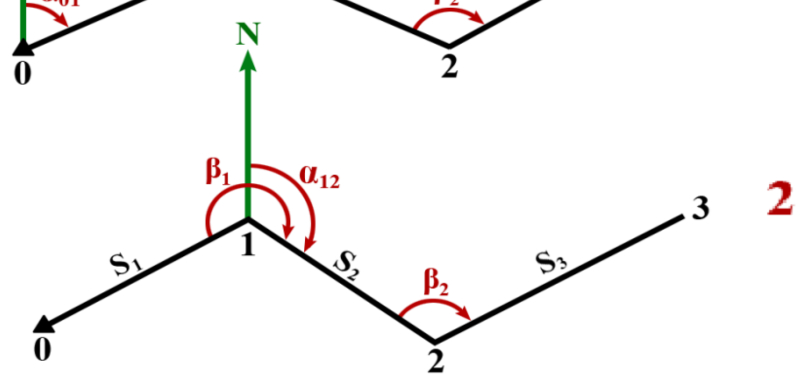
$\beta_1=\beta_2\cong 180^\circ$

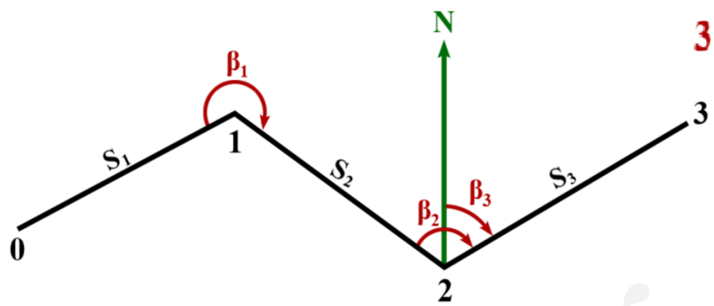
$\sigma_\alpha=5\sigma_\beta$

$\sigma_{\beta_1}=\sigma_{\beta2}=\sigma_\beta$

$\sigma_{s_1}=\sigma_{s_2}=\sigma_{s_3}=\sigma_s$







3

برای شکل شماره ۱ داریم:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_{01} = \alpha_{01} \\ \alpha_{12} = \alpha_{01} + \beta_1 + \pi \\ \alpha_{23} = \alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 + 2\pi \end{cases}$$

$$\sigma_{p3}^2 = \sigma_{p_0}^2 + (\sigma_{S1}^2 + \sigma_{S2}^2 + \sigma_{S3}^2) + R_{0,3}^2\sigma_{\alpha_{01}}^2 + [R_{1,3}^2\sigma_{\beta 1}^2 + R_{2,3}^2\sigma_{\beta 2}^2] =$$

$$\Rightarrow \sigma_{p3}^2 = \sigma_{p_0}^2 + 3\sigma_S^2 + (6S)^2(5\sigma_\beta^2) + [(5S)^2 + (3S)^2]\sigma_\beta^2 = \sigma_{p_0}^2 + 3\sigma_S^2 + 934S^2\sigma_\beta{}^2$$

برای شکل شماره ۲ داریم:

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_{01} = \alpha_{12} - \beta_1 + \pi \\ \alpha_{12} = \alpha_{12} \\ \alpha_{23} = \alpha_{12} + \beta_2 + \pi \end{cases}$$

R با توجه به β در بالا تعین می‌شود.

$$\sigma_{p3}^2 = \sigma_{p_0}^2 + (3\sigma_S^2) + R_{0,3}^2\,\sigma_{\alpha_{1,2}}^2 + [R_{0,1}^2\sigma_{\beta 1}^2 + R_{2,3}^2\sigma_{\beta 2}^2]$$

$$\Rightarrow \sigma_{p3}^2 = \sigma_{p_0}^2 + 3\sigma_S^2 + 900S^2\sigma_\beta^2 + [S^2\sigma_\beta^2 + (3S^2)\sigma_\beta^2 = \sigma_{p_0}^2 + 3\sigma_S^2 + 910S^2\sigma_\beta^2$$

برای شکل شماره ۳ داریم:

$$\begin{cases} \alpha_{01} = \alpha_{23} - \beta_1 - \beta_2 + 2\pi \\ \alpha_{12} = \alpha_{23} - \beta_2 + \pi \\ \alpha_{23} = \alpha_{23} \end{cases}$$

$$\sigma_{p3}^2 = \sigma_{p_0}^2 + (3\sigma_S)^2 + (R_{0,3}^2\,\sigma_{\alpha_{2,3}}^2) + [R_{0,1}^2\sigma_{\beta 1}^2 + R_{0,2}^2\sigma_{\beta 2}^2]$$

$$\Rightarrow \sigma_{p3}^2 = \sigma_{p_0}^2 + 3\sigma_S^2 + 900S^2\sigma_\beta^2 + 10S^2\sigma_\beta^2 = \sigma_{p_0}^2 + 3\sigma_S^2 + 910S^2\sigma_\beta^2$$

مثال: نمودار $\sigma_{P_n}^2$ نسبت به n برای زمانی که فقط خطای زاویه و زمانی که فقط خطای طولی وجود دارد، ترسیم کنید. (مراجعه به اثبات رابطه‌های بست).

الف) فقط خطای زاویه‌ای وجود داشته باشد.

حالت کلی $\sigma_{P_n}^2 = n\sigma_s^2 + \frac{n^3}{3}s^2\sigma_\beta^2 \Rightarrow$ فقط خطای زاویه‌ای

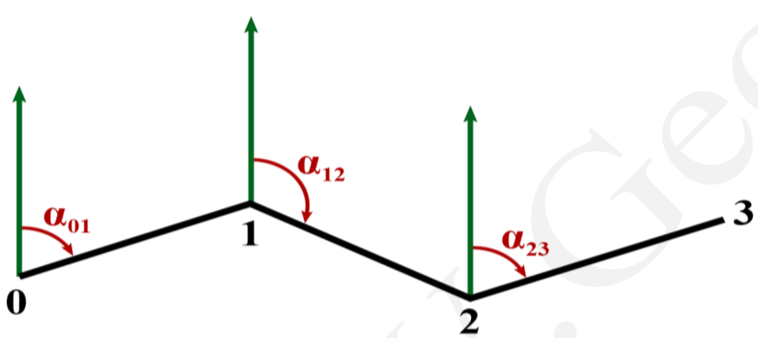
$$\Rightarrow \sigma_{P_n}^2 = \frac{n^3}{3}s^2\sigma_\beta^2$$

ب) فقط خطای طولی وجود داشته باشد.

$\Rightarrow \sigma_{P_n}^2 = n\sigma_S^2$ فقط خطای طولی

ج) فقط خطای ژیزمان وجود داشته باشد.

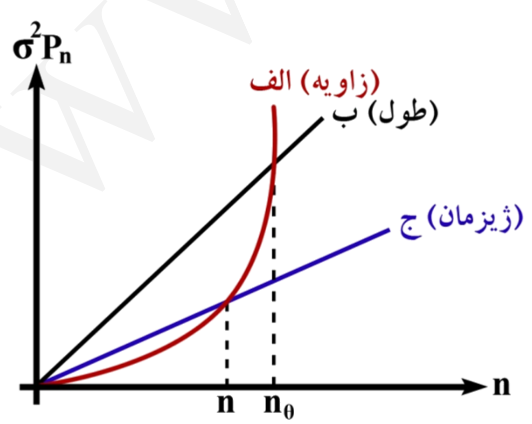
برای بدست آوردن خطا در این حالت، شکل شبکه زیر در نظر گرفته شود.



$$\begin{cases} \alpha_{01} = \alpha_{01} \\ \alpha_{12} = \alpha_{12} \\ \alpha_{23} = \alpha_{23} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{cases}$$

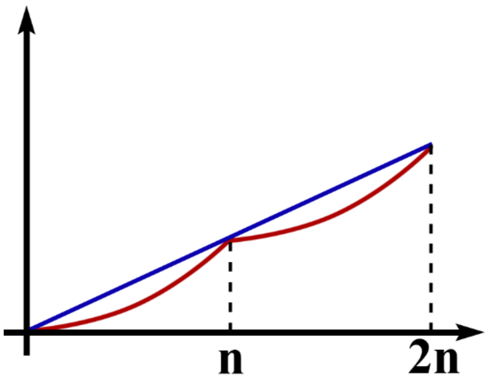
$$\Rightarrow R_{0,1}^2\sigma_\alpha^2 + R_{1,2}^2\sigma_\alpha^2 + \dots + R_{n-1,n}^1\sigma_\alpha^2 = \overbrace{S^2\sigma_\alpha^2 + S^2\sigma_\alpha^2 + \dots\dots + S^2\sigma_\alpha^2}^{n\text{ تا}} = nS^2\sigma_\alpha^2 \Rightarrow \sigma_{P_n}^2 = nS^2\sigma_\alpha^2$$

نمودار هر سه، شکل زیر می‌شود:



از این نمودار و با مقایسه حالت الف و ج می‌توان فهمید که خطا در پیمایش ابتدا کم بوده، ولی با پیشرفت پیمایش و انباشته شدن خطاهای زاویه، به صورت تابع درجه ۳ زیاد می‌شود، ولی خطای مربوط به ژیزمان در شروع پیمایش بیشتر از زاویه است، ولی در عوض به صورت تابع درجه ۱ می‌باشد. بنابراین، بهترین روش در پیمایش آن است که تا نقطه n از روش قرائت زاویه‌ها و در آن نقطه استفاده از قرائت ژیزمان و سپس دوباره تا نقطه 2n از زاویه و ...

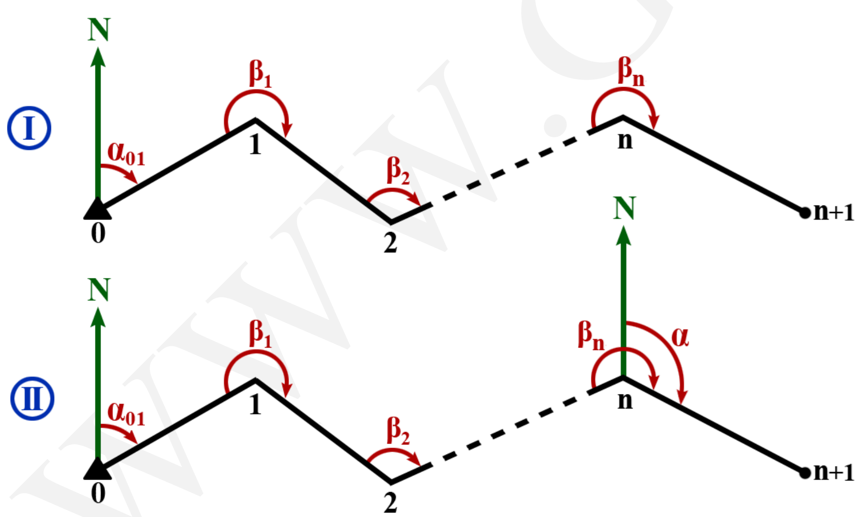
با این کار نمودار به صورت زیر در می‌آید.



مقدار n (نقطه‌ای که باید از یک ژیزمان استفاده شود) به مقدار k در رابطه $\sigma_\alpha = k\,\sigma_\beta$ بستگی دارد. $(K \ge 1)$

روش بدست آوردن n :

می‌توان دو شکل زیر را در نظر گرفت:



$$\begin{cases} \alpha_{01} = \alpha_{01} \\ \alpha_{12} = \alpha_{01} + \beta_1 + \pi \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{n,n+1} = \alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + n\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{p_{n+1}} = R^2_{1,n+1}\sigma^2_{\beta 1} + R^2_{2,n+1}\sigma^2_{\beta 2} + \dots + R^2_{n,n+1}\sigma^2_{\beta n} = \left[n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2\right] S^2 \sigma^2_\beta$$

در حالت اول n برابر n+1 است.

$$\begin{cases}\alpha_{01}=\alpha_{01}\\ \alpha_{12}=\alpha_{01}+\beta_1+\pi\\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ \alpha_{n-1,n}=\alpha_{01}+\beta_1+\beta_2+.....+\beta_{n-1}+(n-1)\pi\\ \alpha_{n,n+1}=\alpha_{n,n+1}\end{cases}$$

در این حالت n برابر n است.

$$\sigma^2_{pn+1}=R^2_{1,n}\sigma^2_{\beta 1}+R^2_{2,n}\sigma^2_{\beta 2}+...+R^2_{n-1,n}\sigma^2_{\beta n-1}+\overbrace{R^2_{n,n+1}\sigma^2_{\alpha}}^{\langle 1\rangle}=\left[(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+(1)^2\right]S^2\sigma^2_{\beta}+S^2(k\sigma_\beta)^2$$

$\langle 1\rangle$:به این دلیل نقطه‌ی nام خطادار بوده ولی نقطه صفر بدون خطا فرض شده، σ^2_α در معادله‌ها دخالت داده شده است.

$$I=II\Rightarrow n^2S^2\sigma^2_\beta-k^2S^2\sigma^2_\beta=0\Rightarrow \quad n=k$$

نکته: پس از نقطه شروع به اندازه n ضلع، (n-1 زاویه) با استفاده از قرائت زاویه و در نقطه n با استفاده از یک ژیزمان. چون k می‌تواند عدد اعشاری شود و بهتر است از این رابطه استفاده شود.

$$N=[k]+1$$

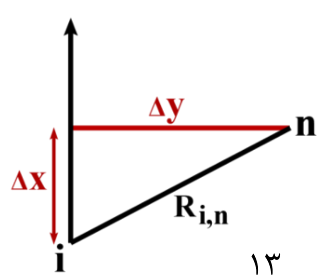
می‌توان اثبات کرد که روابط خطا در راستای x و y به صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma^2_{x_n}=\underbrace{\sigma^2_{x_0}}_{\langle 1\rangle}+\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\overbrace{\frac{(x_i-x_n)^2}{R^2_{i,n}}}^{\langle 3\rangle}\sigma^2_{S_i}}_{\langle 2\rangle}+\overbrace{(y_o-y_n)^2\sigma^2_{\alpha_{0,1}}}^{\langle 4\rangle}+\sum_{i=1}^{n-1}(y_i-y_n)^2\sigma^2_{\beta_i}$$

$\sin\alpha=\frac{\Delta X}{R}:\langle 2\rangle$ $\qquad$ $\langle 1\rangle$:مشتق نسبت به x بر اساس قانون انتشار خطاها

$\langle 4\rangle$:مشتق نسبت به x بر اساس قانون انتشار خطاها $\qquad$ $\langle 3\rangle$:مشتق نسبت به x بر اساس قانون انتشار خطاها

$$\sigma^2_{y_n}=\sigma^2_{y_0}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-y_n)^2}{R^2_{i,n}}\sigma^2_{S_i}+(x_o-x_n)^2\sigma^2_{\alpha_{0,1}}+\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_n)^2\sigma^2_{\beta_i}$$



فصل دوم

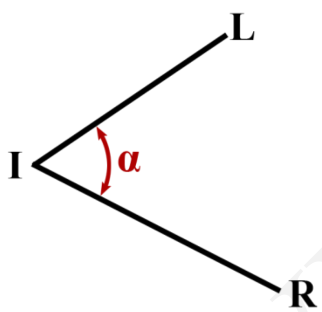
خطاهای اندازه گیری زوایای افقی

۱) خطای دستگاهی تئودولیت (کلیماسیون، خروج از مرکز و ...)

۲) خطای سانتراژ (استقرار)	Centering error
۳) خطای تراز	Leveling error
۴) خطای نشانه روی	Pointing error
۵) خطای پیچش و فرورفتگی	Torsion and indentation error
۶) خطای انکسار	Refraction error

- خطای سانتراژ

فرض کنید برای اندازه گیری زاویه شکل زیر، هم در استقرار دوربین در نقطه I و هم در استقرار نشانه[1]در نقاط R و L خطا وجود دارد بر اساس قانون انتشار خطا، تأثیر این خطا را روی زاویه افقی α بدست آورید.



$$\alpha = G_{IR} - G_{IL} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{x_R - x_I}{y_R - y_I}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x_L - x_I}{y_L - y_I}\right)$$

$$\sigma_\alpha^2 = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_L}\right)^2 \sigma^2_{x_L} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y_L}\right)^2 \sigma^2_{y_L} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_R}\right)^2 \sigma^2_{x_R} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y_R}\right)^2 \sigma^2_{y_R} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_I}\right)^2 \sigma^2_{x_I} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y_I}\right)^2 \sigma^2_{y_I}$$

برای مثال $\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_R}\right)$ حل می‌شود.

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_R} = \frac{\dfrac{y_R - y_I}{(y_R - y_I)^2}}{1 + \left(\dfrac{x_R - x_I}{y_R - y_I}\right)^2} = \frac{y_R - y_I}{\underbrace{(y_R - y_I)^2 + (x_R - x_I)^2}_{L_{IR}^2}} = \frac{y_R - y_I}{L_{IR}^2}$$

[1] Target

حال برای کل معادله داریم:

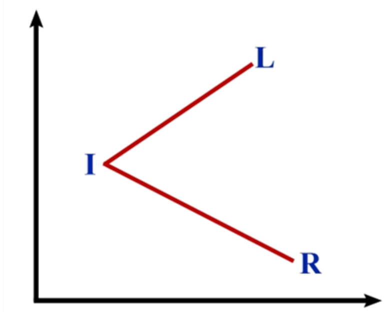
$$\sigma_\alpha^2=\left[\frac{-(y_L-y_I)}{L_{IR}^2}\right]^2\sigma_{x_L}^2+\left[\frac{(x_L-x_I)}{L_{IR}^2}\right]^2\sigma_{y_L}^2+\left[\frac{+(y_R-y_I)}{L_{IR}^2}\right]^2\sigma_{x_R}^2+\left[\frac{-(x_R-x_I)}{L_{IR}^2}\right]^2\sigma_{y_R}^2$$

$$+\left[\frac{-(y_R-y_I)}{L_{IR}^2}+\frac{(y_L-y_I)}{L_{IR}^2}\right]^2\sigma_{x_I}^2+\left[\frac{(x_R-x_I)}{L_{IR}^2}+\frac{-(x_L-x_I)}{L_{IR}^2}\right]^2\sigma_{y_I}^2$$

با فرض به اینکه :

$$L_{IR}=L_{IL}=L \qquad , \qquad \sigma_{x_I}=\sigma_{y_I}=\sigma_{x_R}=\sigma_{y_R}=\sigma_{x_L}\sigma_{y_L}\sigma_c$$

داریم :



$$\Rightarrow\left[\overbrace{\frac{(y_L-y_I)^2}{L^4}+\frac{(x_L-x_I)^2}{L^4}}^{L^2}\right]\sigma_c^2$$

$$\sigma_\alpha^2=\frac{1}{L^2}\sigma_C^2+\frac{1}{L^2}\sigma^2c+\left[\frac{y_L-y_R}{L^2}\right]^2\sigma_C^2+\left[\frac{x_R-x_L}{L^2}\right]^2\sigma_C^2$$

$$=\frac{2}{L^2}\sigma_C^2+\frac{1}{L^4}\left[(y_L+y_R)^2+(x_L-x_R)^2\right]\sigma_C^2=\frac{2}{L^2}\sigma_C^2+\frac{1}{L^4}\left[L_{LR}^2\right]\sigma_C^2=\frac{2}{L^2}\sigma_C^2+\frac{1}{L^4}\left[\overbrace{2L^2-2L^2\cos\alpha}^{a^2b^2-2ab\cos\alpha}\right]\sigma_C^2$$

$$\text{فرض}\left\{\begin{array}{lll}\alpha=0 & \Rightarrow\ \sigma_\alpha^2=\dfrac{2}{L^2}\sigma_C^2 & \Rightarrow\sigma_\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{L}\sigma_C\quad \min\\ \alpha=90^\circ & \Rightarrow\ \sigma_\alpha^2=\dfrac{4}{L^2}\sigma_C^2 & \Rightarrow\sigma_\alpha=\dfrac{2}{L}\sigma_C\\ \alpha=180^\circ & \Rightarrow\ \sigma_\alpha^2=\dfrac{6}{L^2}\sigma_C^2 & \Rightarrow\sigma_\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{L}\sigma_C=(\dfrac{\sqrt{2}}{L}+\dfrac{2}{L})\sigma_C\quad \max\end{array}\right.$$

نکته: پس در هنگامی که زاویه‌های پیمایش به ناچار نزدیک 180° باشد، از ترابراک‌های ثابت برای استقرار استفاده می‌شود (مثل تونل) زیرا در این مواقع خطای سانتراژ بیشترین تأثیر خود را روی زاویه افقی خواهد داشت. در حالت کلی خطایی که برای یک طول یک کیلومتری رخ خواهد داد، در حدود $0.2''$ می‌باشد که با کوچک شدن طول، خطا بزرگ‌تر می‌شود.

تمرین :

مسئله پیش را فقط برای حالتی که خطای استقرار دوربین وجود دارد، بدست آورید.

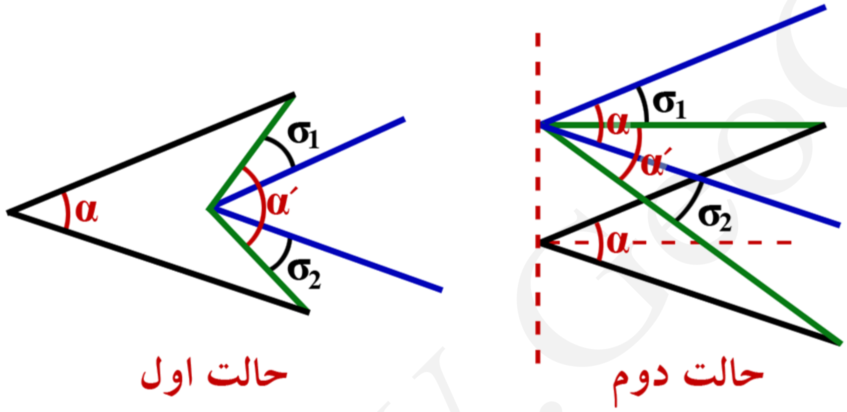
$$\sigma_{x_L}=\sigma_{y_L}=\sigma_{x_R}=\sigma_{y_R}=0$$

$$\sigma_\alpha^2=\frac{1}{L^4}(2L^2-2L^2\cos\alpha)\sigma_C^2$$

$$\begin{cases} if\ \ \alpha=0 & \Rightarrow \sigma_\alpha=0\ \ \min \\ if\ \ \alpha=90^\circ & \Rightarrow \sigma_\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{L}\sigma_C \\ if\ \ \alpha=180^\circ & \Rightarrow \sigma_\alpha=\dfrac{2}{L}\sigma_C \quad \max \end{cases}$$

اگر فقط در سانتراژ دوربین خطا وجود داشته باشد، ثابت کنید که بیشترین خطا زمانی رخ می‌دهد که خطای سانتراژ در راستای نیمساز زاویه αباشد و کمترین خطا در راستای عمود بر نیمساز است.

تمرین اخیر از روی شکل کاملاً مشهود است :



$\alpha=\alpha'-(\sigma_1+\sigma_2)$ حالت اول $\qquad$ $\alpha=\alpha'+(\sigma_1-\sigma_2)$ حالت دوم

$$\Rightarrow \sigma_1+\sigma_2>\sigma_1-\sigma_2$$

می‌دانیم رابطه‌ی خطای زاویه α بر اثر خطای سانتراژ به صورت زیر است :

هنگامی که فقط خطای استقرار دوربین وجود داشته باشد.

$$\sigma_\alpha^2=\frac{1}{L^4}(2L^2-2L^2\cos\alpha)\sigma_c$$

σ_c : خطای شاقول دستگاه است.

خطای شاقول دستگاه با توجه به نوع شاغول دستگاه متفاوت است:

نوع شاقول	انحراف معیار برای یک متر ارتفاع دستگاه (σ_c)
شاقول اپتیکی	$\sigma_c=0.5^{mm}$
شاقول لیزری	$\sigma_c=0.5^{mm}$

شاقول میله‌ای	$\sigma_c=0.5^{mm}$
شاقول نخی	$\sigma_c=1^{mm}$

مثال: اگر ارتفاع دوربین 1.7^{m} بوده و از شاقول نخی برای سانتراژ استفاده شده باشد. تأثیر خطای سانتراژ روی زاویه‌های افقی زیر را بدست آورید.

$$L=100^{m}$$

$$\begin{cases}\alpha\cong 0\\ \alpha\cong 90\\ \alpha\cong 180\\ \alpha\cong \infty 45\end{cases}$$

$$\frac{1}{1^{mm}}=\frac{1.7}{x}\rightarrow\sigma_{c_{Hi}}=1.7^{mm}$$

$$\alpha=0^{\circ}\Rightarrow\sigma_{\alpha}^{2}=\frac{1}{L^{4}}(2L^{2}-2L^{2}\cos\alpha)\sigma_{c}^{2}=(\frac{2-2\cos\alpha}{L^{2}})\sigma_{c}^{2}$$

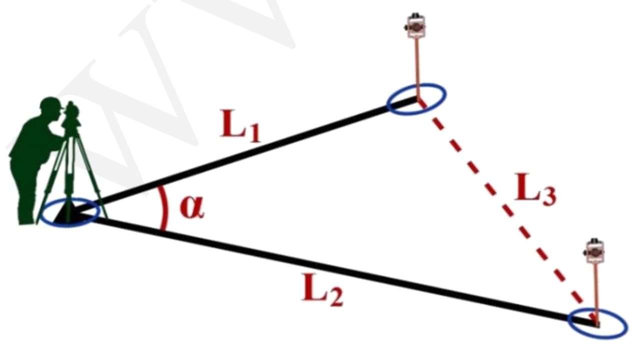
$$\Rightarrow\sigma_{\alpha=0}=\frac{1}{L}(2-2\cos\alpha)^{0.5}\sigma_{c}=\frac{1}{100}\times 0\times 1.7\div 1000\times 206265=0$$

$$\alpha=90^{\circ}\Rightarrow\sigma_{\alpha=90}=\frac{1}{100}\times\sqrt{2}\times 1.7\div 1000\times 206265=4.96''$$

$$\alpha=180^{\circ}\Rightarrow\sigma_{\alpha=180}=\frac{1}{100}\times 2\times 1.7\div 1000\times 206265=7.01''$$

$$\alpha=45^{\circ}\Rightarrow\sigma_{\alpha=45}=\frac{1}{100}(2-\sqrt{2})\times 1.7\div 1000\times 206265=2.05''$$

بررسی مهم‌ترین خطاهایی که روی قرائت زاویه α اثر می‌گذارد.



مهم‌ترین این خطاها خطای استقرار دوربین، استقرار تارگت و خطای نشانه روی قرائت زاویه است.

$$\sigma_{\alpha}=(\sigma_{i}^{2}+\sigma_{t}^{2}+\sigma_{p.r}^{2})^{1/2}$$

σ_i: خطای استقرار دوربین　　σ_t: خطای استقرار تارگت　　$\sigma_{p.r}$: خطای نشانه روی و قرائت

پیش‌تر گفته شد که خطای استقرار دوربین (سانتراژ) برابر $\sigma_\alpha = \frac{1}{L}(2L^2 - 2L^2\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}\sigma_c$ است. این برای زمانی بود که طول دو امتداد زاویه L_1, L_2 باهم برابر باشد، ولی رابطه‌ی کلی آن به صورت زیر است.

$$\sigma_i = (\frac{L_3}{L_2 \times L_1})\sigma_c = (\frac{L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\alpha}{L_1 \times L_2})\sigma_c$$

که در اینجا همان σ_c خطای شاقول دستگاه است؛ و خطای استقرار نشانه نیز از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\sigma_t = (\frac{(L_1^2 + L_2^2)^{\frac{1}{2}}}{L_1 \times L_2})\sigma_a$$

σ_a: خطای استقرار تارگت است.

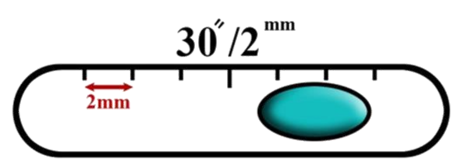
نکته: همان گونه که در رابطه‌ی بالا دیده می‌شود، مقدار خطای استقرار نشانه، تابعی از فاصله دوربین تا نشانه است. هرچه فاصله دوربین تا نشانه بیشتر شود، اثر این دو خطا کمتر می‌شود.

- **خطای تراز**[1]

حساسیت تراز

به مقدار جابجایی حباب تراز در اثر انحراف $1''$ محور شاقولی دوربین حساسیت تراز گفته می‌شود. هرچه بیشتر جابجا شود، حساسیت بیشتر بوده و هرچه شعاع انحنای تراز بیشتر باشد، حساسیت بیشتر است.

اگر به تراز استوانه‌ای دقت کنید به این صورت است.



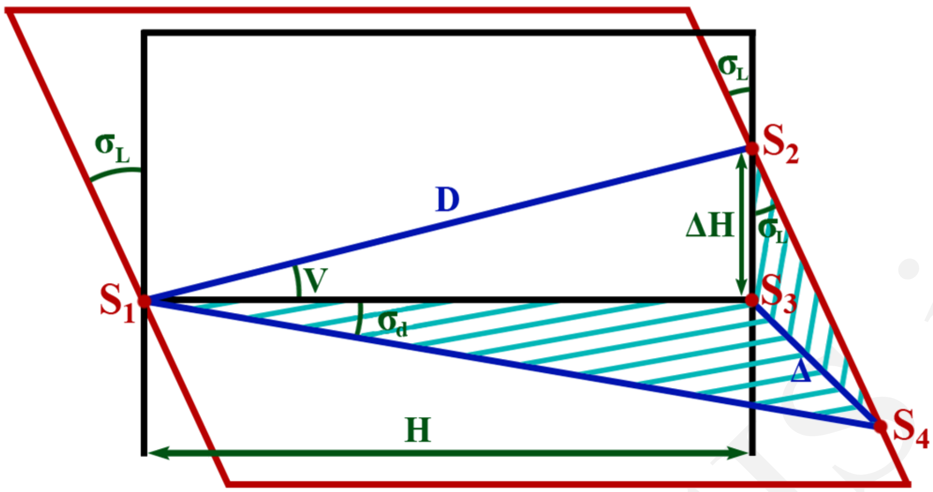
$$\frac{2^{mm}}{30''} = \frac{S}{1''} \Rightarrow S = (\frac{1}{15})^{mm}$$

مثال: اگر حباب تراز به شکل بالا باشد، دستگاه چقدر از حالت تراز خارج شده است؟

$$\sigma_L = (\frac{R+L}{2}) \times 30'' = \frac{0.7+3}{2} \times 30'' = 55''$$

[1] Leveling Error

بدست آوردن خطای زاویه افقی در اثر خطای تراز :



$$\Delta s_1 s_2 s_3 : D\sin(v) = \Delta H$$
$$\Delta s_2 s_3 s_4 : (\Delta H)\sigma_L = \Delta$$
$$\Delta s_1 s_3 s_4 : H \times \sigma_d = \Delta$$

$$\Rightarrow \sigma_L = \frac{\Delta}{\Delta H} = \frac{\overset{H = D\cos v}{H} \times \sigma_d}{D\sin(v)} = \frac{\cos(v)}{\sin(v)}\sigma_d$$
$$\Rightarrow \sigma_L = \cos(v)\sigma_d \quad \Rightarrow \quad \sigma_d = \sigma_L tag(v)$$

v : زاویه شیب σ_L: بر حسب رادیان σ_d: خطای ناشی از تراز بر روی قرائت امتداد

حال می‌توان خطای زاویه را نیز بدست آورد:

$$\alpha = d_2 - d_1 \Rightarrow \sigma_\alpha^2 = (\frac{\partial\alpha}{\partial d_1})^2\sigma_{d_1}^2 + (\frac{\partial\alpha}{\partial d_2})^2\sigma_{d_2}^2 = \sigma_{d_1}^2 + \sigma_{d_2}^2 = \sigma_L^2\left[\tan^2(V_1) + \tan^2(V_2)\right]$$

σ_L: بر حسب رادیان

همان گونه که ملاحظه می‌شود، با افزایش زاویه ارتفاعی، خطای تراز روی قرائت زاویه تأثیر بیشتری دارد و به همین دلیل، در دوربین‌های T3 (نجومی) تراز حساس‌تری به نام تراز لوبیایی وجود دارد تا تراز دستگاه دقیق باشد.

- خطای نشانه روی

۱) حد تشخیص سیستم‌های نوری Resolving power of optical system

۲) طرح علامت نشانه Target Design

۳) خطای قرائت Reading error

۴) تحوج حرارتی Thermal error

۵) شرایط دید — Visibility conditions

۱- حد تشخیص سیستم‌های نوری

از رابطه زیر می‌توان بدست آورد.

$$\varepsilon'' = 1.22\frac{\lambda}{d}\times\rho$$

ε: بر حسب ثانیه λ: طول موج نور   D: قطر عدسی ρ : عدد تبدیل ثانیه درجه ای به رادیان ۲۰۶۲۶۵

برای مثال، می‌توان قدرت تفکیک فاصله‌ای چشم انسان را محاسبه کرد.

$$\varepsilon = 1.22\frac{0.6\times10^{-6}}{2\times10^{-3}}\times(0.3)\cong 0.1^{mm}$$

0.3: فاصله شئی تا چشم 0.6×10^{-6}: طول موج نور مرئی (0.6^{μ}) ε: بر حسب فاصله زاویه ای (رادیان)

2×10^{-3}: قطر چشم انسان ۲ میلیمتر است.

به این دلیل خطای ترسیم 0.1^{mm} در نظر گرفته شود.

اگر بخواهیم به متر بدست آید، باید ρ به متر تبدیل شود.

$$\lambda = 0.6^{\mu} = 0.6\times10^{-6m} \qquad 1^{mm} = 1000^{\mu} \qquad d_e = 2^{mm} = 2\times10^{-3m}$$

در مورد دوربین‌ها می‌توان نوشت :

$$M = \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_t} = \frac{d_t}{d_e}$$

M : بزرگ‌نمایی d_t: قطر عدسی شئی دوربین d_e: قطر عدسی چشم ε_e: حد تشخیص چشم

ε_t: حد تشخیص دوربین

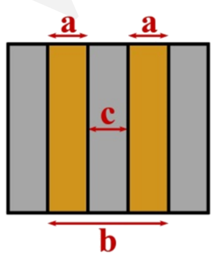
$$M = \frac{72}{2} = 36$$

مثال: برای یک دوربین با $d_t = 72^{mm}$ بزرگنمایی M=36 کافی است، ولی در عمل بزرگنمایی را حدود ۲۵ درصد بیشتر انتخاب می‌کنند. مثلاً M=45

۲- طرح علامت نشانه

بهترین علامت نشانه، شکل متقارنی به صورت زیر است:

$$c = \frac{3''D}{\rho} \qquad a = \frac{120D}{M\times\rho} \qquad b = 2a + c$$



M: بزرگنمایی   D: فاصله نشانه روی ρ : عدد تبدیل ثانیه درجه ای به رادیان ۲۰۶۲۶۵

مثال: ابعاد علامت نشانه را برای فاصله $D=1^{km}$ طراحی کنید. (M=45)

$$a=\frac{120\times1000}{45\times20265}=0.013=13^{mm} \qquad c=\frac{3\times1000}{206265}=0.015=15^{mm}$$

$$b=2(13)+15=41^{mm}$$

بهترین ترکیب رنگ برای نشانه سیاه و زرد است.

۳- خطای قرائت

اگر d کوچک‌ترین تقسیم بندی لمب دوربین در نظر گرفته شود، خطای استاندارد قرائت به صورت زیر است :

دوربین‌هایی با $1''$ تا $d=0.5'' \Leftarrow \sigma_r=2.5\times d''$

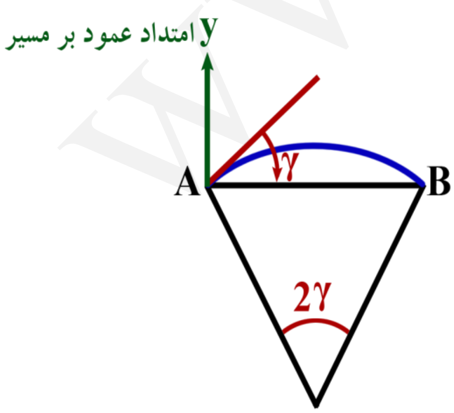
دوربین‌هایی با $1'$ تا $d=10'' \Leftarrow \sigma_r=0.3\times d''$

σ_r: خطای استاندارد برای قرائت

حال اگر در n کوپل این قرائت انجام شده باشد، خطای قرائت برابر $\sigma_{\alpha r}=\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}$ خواهد بود.

در کل با شرایط دید خوب برای نشانه روی رابطه $\frac{60''}{M}$ $\frac{30''}{M}$ در نظر گرفته می‌شود.

- خطای پیچش و فرورفتگی



- خطای انکسار

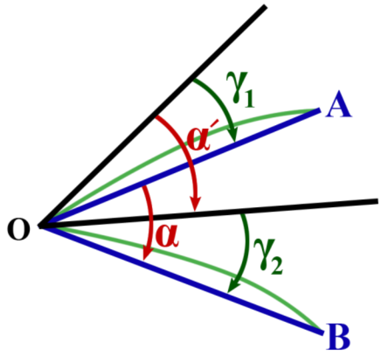
خطرناک‌ترین خطای زاویه یابی خطای انکسار است. در اثر تغییرات دما در راستای افقی عمود بر خط قراولروی (گرادیانت دما $\frac{dt}{dy}$) به وجود می‌آید و باعث می‌شود، خط دید به یک کمان تبدیل شود و خطای را در قرائت امتداد به وجود می‌آورد.

چون اطلاعات کافی در مورد گرادیانت دما وجود ندارد، باید سعی شود:

- علامت نشانه در کنار دیواره‌های گرم قرار داده نشود.

- صبح‌های زود یا شب به قرائت زاویه‌ها پرداخته شود.

برای مثال در یک زاویه افقی :



$$\alpha = \alpha' + (\gamma_2 - \gamma_1)$$

از لحاظ رابطه ای، دو روش برای محاسبه γ وجود دارد :

۱- با اندازه گیری فشار، دما و گرادیانت دما

$$\gamma = 8''(\frac{P.D}{t^2})(\frac{dt}{dy})$$

P: فشار بر حسب mm Hg   t: دما بر حسب کلوین (k) و دما بر حسب کلوین t=(273.15+T)

T: دما بر حسب میلیمتر جیوه   D: فاصله نشانه روی (m) $(\frac{dt}{dy})$: بر حسب درجه سانتی گراد بر متر $(\frac{o^c}{m})$

مثال: چنانچه امتداد AB به طول ده کیلومتر در کنار ساحلی بخواهد اندازه گیری شود، مطلوب است محاسبه تصحیح انکسار برای امتداد بالا در صورتی که داشته باشیم:

$$\frac{dt}{dy} = 0.01^{\circ c} \qquad n_{01} = 1.00029 \qquad p = 750^{mmHg} \qquad t = 20^{\circ c}$$

$$t = 20^{\circ c} = (273.15 + 20) = 293.15^{\circ k} \quad \Rightarrow \alpha = 8''(\frac{750 \times 10 \times 10^3}{(293.15)^2}) \times 0.01 \cong 7''$$

۲- به وسیله دو نور با طول موج‌های گوناگون λ_1 , λ_2 امتداد قرائت و از روابط زیر γ محاسبه می‌شود.

$$\gamma_1 = \Delta\gamma(\frac{n_{01} - 1}{\Delta n_0})$$

البته، این تصحیح خطایی دارد که به شکل زیر از قانون انتشار خطا بدست می‌آید:

$$\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\Delta\gamma}(\frac{n_{01} - 1}{\Delta n_0}) = \sigma_{\Delta\gamma}\frac{\gamma_1}{\Delta\gamma}$$

$$\Delta\gamma = |d_2 - d_1| \Rightarrow \sigma_{\Delta\gamma}^2 = \sigma_{d_2}^2 + \sigma_{d_1}^2 \xrightarrow{\sigma_{d_1} = \sigma_{d_2} = \sigma_d} \sigma_{\Delta\gamma} = \sqrt{2}\sigma_d$$

n_{01}: ضریب شکست نور برای موج اول n_{02}: ضریب شکست نور برای موج دوم

$$\Delta n_0 = |n_{02} - n_{01}|$$

برای یافتن n_0 داریم :

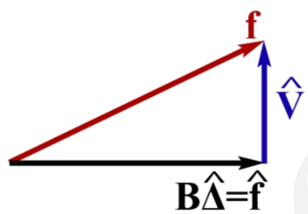
$$(n_0 - 1)\times 10^6 = \frac{287.604 + 1.6288}{\gamma^2} + \frac{0.0136}{\gamma^4}$$

γبر حسب میکرون است. حال بر حسب n_{01} یا γ_1 یا γ_2 که می‌شود. n_{02}

مروری بر سرشکنی پارامتریک

$W = Q_L^{-1}$ می‌توان اثبات کرد کـه روش سرشـکنی کمتـرین مربعـات مینـیمم اثـر (Trace) مـاتریس کوفـاکتور مجهولات برآورد شده را خواهد داشت ($Q_{\hat{\Delta}} \sum x$)

با فرض : $Q_L^{-1} = \sum_L^{-1}$



$$V + B\Delta = f \Rightarrow v = f - B\Delta$$
$$\varphi = V^t wV \xrightarrow{d-L} \min$$
$$\varphi = (f - B\Delta)^t w (f - B\Delta) \Longrightarrow$$
$$\hat{\Delta} = (B^t wB)^{-1} B^t wf$$
$$\hat{f} = B\hat{\Delta} = B(B^t wB)^{-1} B^t wf \Rightarrow \hat{V} = f - \hat{f}$$
$$\Rightarrow \underbrace{[I - B(B^t wB)^{-1} B^t w]}_{R} f = Rf \Rightarrow \hat{V} = Rf = (R(d - L))$$
$$if \qquad d = 0 \Rightarrow \hat{V} = -RL$$

R : ماتریس آزادی

اگر (R) به صورت زیر نشان داده شود،

$$R_{n\times n} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r_{ii} \le 1 \\ Trace(R) = \sum_{i=1}^{n} r_{ii} = n - u = df \end{cases}$$

df: درجه آزادی $\qquad$ r_{ii}: اعداد آزادی (درایه‌های قطر اصلی ماتریس آزادی)

$$\mathrm{Trace}(R) = \mathrm{Trace}[I - B(B^t WB)^{-1} B^t w] \Rightarrow$$

اثبات $\quad Trace(R) = df$

$$\Rightarrow \mathrm{Trace}(R) = \mathrm{Trace}(I_{n\times n}) - \mathrm{Trace}(B(B^t WB)^{-1} B^t W) = n - Trace((B^t wB)^{-1}(B^t WB)) =$$
$$\Rightarrow \mathrm{Trace}(R) = n - \mathrm{Trace}(I_{u\times u}) = n - u = df$$
$$Q_{\hat{\Delta}} = \sum_{\hat{x}} = N^{-1} = (B^t WB)^{-1}$$
$$Q_L = BN^{-1}B^t = B(B^t WB)^{-1} B^t$$

$$Q_{\hat V}=Q_L-Q_{\hat L}=RQ_x=Rw^{-1}$$

نکته کنکوری:

می‌توان اثبات کرد که اگر ماتریس Q_L داده شده، از لحاظ نسبی صحیح باشد و فقط امکان غلط بودن به صورت مطلق (یعنی در یک عدد ثابتی ضرب شده باشد) آن وجود داشته باشد، این غلط بودن روی پاسخ‌های $\hat\Delta$, $\hat V$, $\hat L$ تأثیری نداشته، ولی روی $Q_{\hat V}, Q_{\hat\Delta}, Q_{\hat L}$ تأثیر خواهد گذاشت.

فرض کنید به اشتباه به جای استفاده از $\sigma_0^2 Q_L$، از Q_L استفاده شده باشد، حال تأثیر آن را می‌توان مشاهده کرد.

$$\Delta=(B^tWB)^{-1}B^twf=(B^t\frac{1}{\sigma_0^2}Q_L^{-1}B^t)^{-1}B^t(\frac{1}{\sigma_0^2}Q_L^{-1})f$$ بی تأثیر

$f=B\hat\Delta$ بی تأثیر

$\hat V=f-\hat f$ بی تأثیر

$$Q_{\hat\Delta}=(B^t\frac{1}{\sigma_0^2}WB)^{-1}=\sigma_0^2(B^tWB)$$ تأثیر گذار

$Q_L\Rightarrow\sigma_0^2Q_{\hat L}$ تأثیر گذار

$Q_{\hat V}\Rightarrow\sigma_0^2Q_{\hat L}$ تأثیرگذار

به مقدار σ_0^2، فاکتور واریانس اولیه گفته می‌شود که در ابتدا برابر ۱ گرفته می‌شود.

اصول کلی سرشکنی

۱) ابتدا $\sigma_0^2=1$ گرفته و سرشکنی انجام می‌شود و $\hat V$ بدست می‌آید.

۲) مقدار فاکتور واریانس ثانویه ($\hat\sigma_0^2$) از رابطه $\hat\sigma_0^2=\frac{\hat v^t w\hat v}{df}$ بدست آمده و مورد آزمون قرار می‌گیرد.

۳) اگر پذیرفته شد، سرشکنی تمام شده و می‌توان $Q_{\hat V}, Q_{\hat\Delta}, Q_{\hat L}$ را بدست آورد.

۴) اگر رد شد، ماتریس Q_L را با $\hat\sigma_0^2Q_L$ جایگذاری کرده و سرشکنی را دوباره انجام می‌شود.

۵) $\hat\sigma_0$ آزمون می‌شود، که باید پذیرفته شود؛ اگر پذیرفته نشود، یکی از سه حالت زیر وجود دارد:

۱. مدل ریاضی اشتباه است.

۲. ماتریس Q_L از لحاظ نسبی غلط است.

۳. در مشاهده‌ها خطای فاحش وجود دارد.

روش تست کردن

برای هر آزمون یک فرض صفر (H_0) وجود دارد که دارای یک تابع توزیع آماری به خصوص است.

مثلاً: سکه سالم است H_0

(H_0 درست بود | رد شدن H_0) $\alpha=p$ خطای نوع اول

(سکه سالم بود| سکه ناسالم) $\alpha = p$

ابتدا یک آماره (تابعی از پارامتر مورد آزمون) تشکیل داده که تابع توزیع آن معلوم است.

جهت تست $\hat{\sigma}_0$ (فاکتور واریانس ثانویه) حتماً باید از آماره کای‌اسکور χ^2 استفاده کرد.

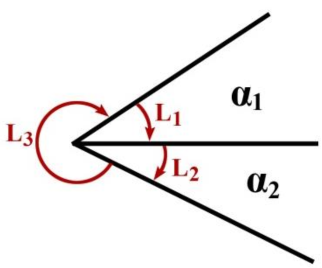
$$\theta = \frac{(df)\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_0^2} \chi^2_{\frac{\alpha}{2},df}$$

مثال: اگر در یک سرشکنی $\sigma_0 = 1$ و $\hat{\sigma}_0 = 2$ برآورد شده باشد، در سطح اطمینان ۹۵ درصد مـورد آزمـون قـرار دهید. (df=10)

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$

$\theta = \frac{10\times(2)^2}{1} = 40$ رد می‌شود

در مثال زیر مقادیر $\hat{V}$ را بدست آورده، $\hat{\sigma}_0$ را برآورد کرده و آن را تفسیر کنید:



$$n = 3 \qquad L_1 = 40^\circ$$
$$u = 2 \qquad L_2 = 70^\circ$$
$$df = 1 \qquad L_3 = 250.03^\circ$$
$$\sigma_{L1} = \sigma_{L2} = \sigma_{L3} = 1^\circ$$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ را بدست آورد $\hat{V}$ با حل آن می‌توان $\Rightarrow \hat{V} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \end{bmatrix}$

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{\hat{v}^t w\hat{v}}{df}=\frac{\hat{v}^t I\hat{v}}{1}=\hat{v}^t I\hat{v}=\begin{bmatrix}-0.01 & -0.01 & -0.01\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.01\\-0.01\\-0.01\end{bmatrix}\Rightarrow \hat{\sigma}_0^2=3\times10^{-4}$$

اگر به مشاهده‌ها دقت شود، خواهید دید که دقت مشاهده‌ها در حدود صدم درجه بوده، ولی مسئله آن را حدود 1° معرفی کرده است. برای پیدا کردن دقت واقعی مشاهده‌ها داریم:

$$Q_1=I\Rightarrow \hat{C}_L=\hat{\sigma}_0^2 Q_L=\begin{bmatrix}3\times10^{-4} & 0 & 0\\ 0 & 3\times10^{-4} & 0\\ 0 & 0 & 3\times10^{-4}\end{bmatrix}\Rightarrow \hat{\sigma}_{L_1}^2=3\times10^{-4}\Rightarrow \hat{\sigma}_{L_1}^2=\sqrt{3\times10^{-4}}=0.017^\circ$$

این یعنی دقت واقعی مشاهده‌ها برابر 0.017° است نه 1°

کار عملی

روش عملی بدست آوردن خطای قرائت (σ_r) نشانه روی (σ_p) و سانتراژ (σ_c) با دوربین T2 با تعداد تکرار ۳۰ بار است.

$$\begin{array}{l}L_1\\L_2\\\vdots\\L_{30}\end{array}$$

۱) خطای قرائت

$$\sigma_r^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(L_i-\bar{L})^2$$

در این حالت، دوربین حرکت داده نمی‌شود و تنها پیچ حرکت کُند (ورنیه) تغییر داده می‌شود. مشاهده‌هایی که در بازه $\bar{L}-3\sigma<L_i<\bar{L}+3\sigma$ نباشد، خطاست و ا حذف می‌گردد و دوباره واریانس محاسبه می‌شود و پاسخ بدست آمده به عنوان واریانس قرائت پذیرفته و با مقدار تئوری آن مقایسه می‌شود.

۲) خطای نشانه روی

پیچ قفل لمب افق را باز نکرده و دوربین را با پیچ حرکت کُند حرکت داده، سپس نشانه روی و زاویه قرائت می‌گردد.

$$\sigma_{r,p}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(L_i-\bar{L})^2$$

$$\sigma_{r,p}^2=\sigma_r^2+\sigma_p^2\ \Rightarrow\ \sigma_p^2=\sigma_{r,p}^2-\sigma_r^2$$

۳) خطای سانتراژ

بی آنکه در دوربینی که به سمت ژالن نشانه روی شده تغییری داده شود، ژالن از جای خود برداشته و دوباره سر جای خود قرار گیرد و زاویه خوانده می‌شود (پیچ حرکت کُند حرکت داده شود).

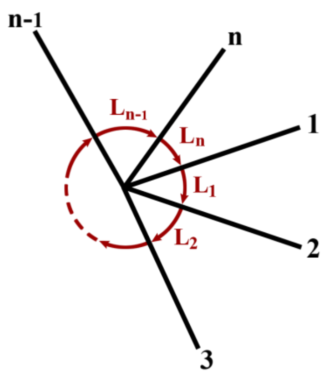
$$\sigma^2_{r,p,c} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(L_i - \bar{L})^2$$

$$\sigma^2_{r,p,c} = \sigma^2_r + \sigma^2_p + \sigma^2_c \Rightarrow \sigma^2_c = \sigma^2_{r,p,c} - \sigma^2_r - \sigma^2_p$$

روش‌های اندازه گیری زوایای افقی

۱) روش زوایای مستقل[1]

اگر n امتداد وجود داشته باشد، هر زاویه به صورت مستقل و با تکمیل دور افق قرائت می‌شود.



تعداد مشاهده‌ها $=n$ مجهولات $=n-1$

$$df = n-(n-1) = 1$$

می‌توان $\hat{V}$ را بدست آورد :

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} m/n \\ m/n \\ \vdots \\ m/n \end{bmatrix} \quad , \quad m = 360 - \sum_{i=1}^{n} L_i \text{ خطای بست}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T I \hat{V}}{1}\begin{bmatrix} m/n & m/n & \cdots & m/n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m/n \\ m/n \\ \vdots \\ m/n \end{bmatrix} = n(\frac{m}{n})^2 = \frac{m^2}{n} = \hat{\sigma}_0^2$$

می‌توان بدست آورد که :

[1]Method Of Independent Angles

$$\hat{C}_{\hat{\Delta}} = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{n-1}{n} \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_{x_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

برای مثال در مورد مسئله پیش داریم :

$$Q_{\hat{\Delta}} = (B^T w B)^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

در این روش، برای هر ایستگاه هر اندازه که امکان دارد زاویه قرائت می‌شود.

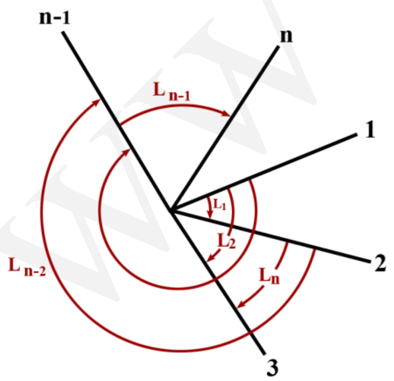
$$C_{\hat{\Delta}} = \hat{\sigma}_0^2 \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

در نتیجه: $\hat{\sigma}_{\hat{X}}^2 = \hat{\sigma}_0^2 \frac{n-1}{n}$

حالت کلی $\hat{\sigma}_{\hat{X}}^2 = \dfrac{\text{تعداد زاویه های مورد نیاز}}{\text{کل زاویه های قرائت شده}} \times \hat{\sigma}_0^2$

۲) روش اسکرآیبر (تمام زوایای ممکن)

در این روش، برای هر ایستگاه هر اندازه که امکان دارد زاویه قرائت می‌شود. اگر n امتداد به صورت زیر وجود داشته باشد، دقت کنید که دور افق قرائت نخواهد شد.



مشاهده‌ها $= \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

$\binom{n}{2}$: از هر دو امتداد n بار قرائت شود.

مجهولات $= n-1$

با استفاده از قانون اُتریبسکی می‌توان دقت زوایای سرشکن شده را بدست آورد.

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{X}} = \underbrace{\hat{\sigma}^2_0 (\frac{\text{تعداد مشاهده های مورد نیاز}}{\text{کل مشاهده‌ها}})}_{\langle 1 \rangle} = \hat{\sigma}^2_0 \left(\frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} \right) = \underbrace{\hat{\sigma}^2_0 (\frac{2}{n})}_{\langle 2 \rangle}$$

$\langle 1 \rangle$: یک رابطه برای حالت معمولی است و برای حالات خاص استفاده نمی‌شود.

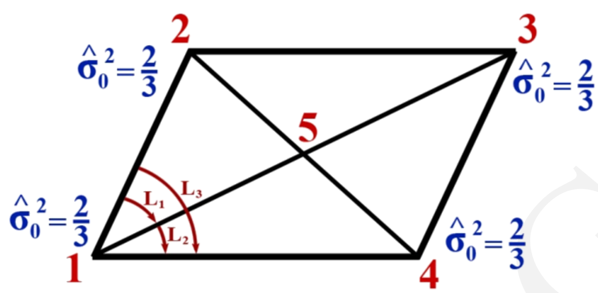
$\langle 2 \rangle$: این یک رابطه‌ی کلی است و برای حالت‌های خاص باید از این رابطه استفاده کرد.

- دقت کنید که در این روش نیز دقت زوایای سرشکن شده به تعداد امتدادها وابسته است.

مثال: در شبکه زیر مطلوب است دقت سرشکن شده در هر ایستگاه

الف) اگر از روش اسکرایبر استفاده کنید.

ب) اگر از روش زوایای مستقل استفاده کنید.



در مورد نقطه شماره ۵، حالت خاص وجود دارد زیرا با داشتن یک مشاهده می‌توانید بقیه را بدست آورید. پس یک مشاهده لازم است، ولی در اینجا تمام مشاهده‌ها ۶ تا است ($\frac{n(n-1)}{2}$) در نتیجه $\hat{\sigma}^2_0 = \frac{1}{6}$

باید از رابطه‌ی کلی استفاده کرد. $\hat{\sigma}^2_0 = (\frac{\text{تعداد مشاهده‌ها مورد نیاز}}{\text{کل مشاهده‌ها}})$

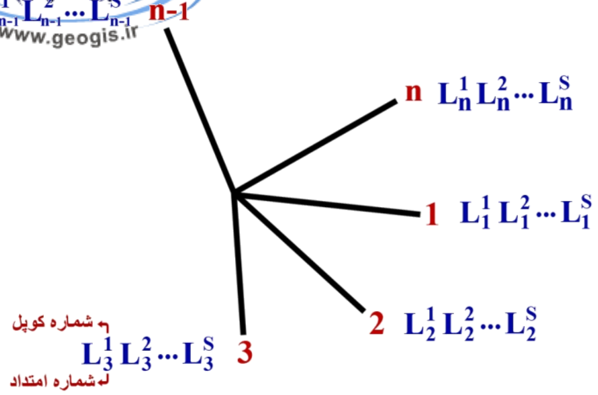
ب) روش مستقل

برای نقاط ۱ تا ۴ می‌شود: $\hat{\sigma}^2_0 = \frac{n-1}{n} \Rightarrow \hat{\sigma}^2_0 = \frac{2}{3}$

و برای نقطه ۵ می‌شود: $\hat{\sigma}^2_0 = \frac{1}{4}$

۳) روش امتدادی با کوپل‌های کامل

در این روش:



اگر s کوپل داشته باشیم.

تعداد مشاهده‌ها = n × S

تعداد مجهولات = تعداد زاویه‌های مجهول + S=(n-1)+S

S: تعداد دور کوپل، زیرا در هر دور کوپل یک صفر لمب مجهول وجود دارد.

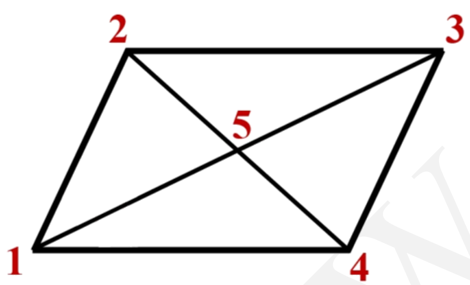
$$df = n.s - [(n-1)+s] = n.s - s - (n-1) = s(n-1) = (n-1)(s-1)$$

دقت زوایای سرشکن شده:

$$\hat{\sigma}_{\hat{X}}^2 = \hat{\sigma}_0^2 \left(\frac{\text{تعداد مشاهده‌ها مورد نیاز}}{\text{کل مشاهده‌ها}}\right) = \hat{\sigma}_0^2 \left(\frac{n}{n.S}\right) = \hat{\sigma}_0^2 \left(\frac{1}{S}\right)$$

در این روش دقت به امتدادها وابسته نبوده و فقط به تعداد کوپل‌ها در هر زاویه بستگی دارد.

مثال: مثال پیش را برای روش امتدادی با کوپل‌های کامل حل کنید. (تعداد کوپل چهار بار s=4)



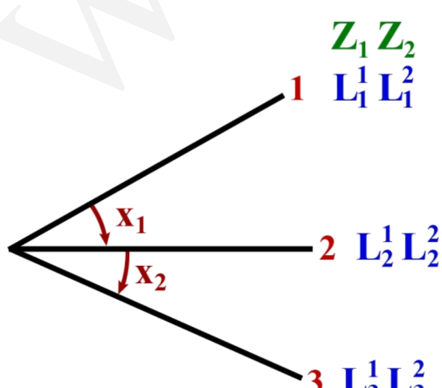
$$1,2,3,4 = \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{4}$$

$$5 = \left(\frac{\text{تعداد مشاهده‌ها مورد نیاز}}{\text{کل مشاهده‌ها}}\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$\text{راس} \quad 5 = \left(\frac{\text{تعداد مشاهده‌ها مورد نیاز}}{\text{کل مشاهده‌ها}}\right) = \left(\frac{\text{دو امتداد برای یک زاویه قرائت شود تا مسئله صفر لمب حل شود}}{\text{کل مشاهده‌ها}}\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

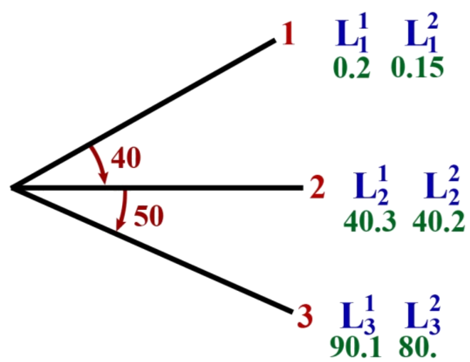
برای درک بهتر، سه امتداد که در دو کوپل قرائت شده را در نظر گرفته و معادله‌های مشاهده‌ها برای آن نوشته می‌شود.

z_1 و z_2 مجهولات صفر لمب در کوپل اول و دوم هستند.



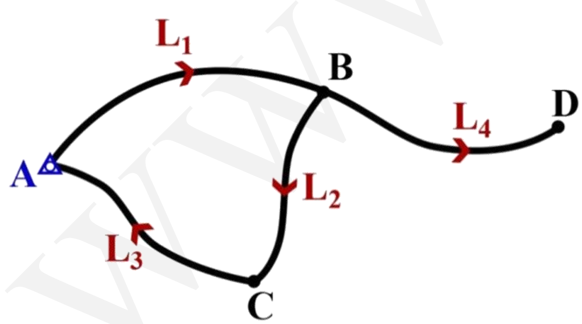
$$\begin{cases} l_1^1 + z^1 = 0 \\ l_2^1 + z^1 - x = 0 \\ l_3^1 + z^1 - x_1 - x_2 = 0 \\ l_1^2 + z^2 = 0 \\ l_2^2 + z^2 - x_1 = 0 \\ l_3^2 + z^2 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$ معادله‌های پارامتریک

تمرین:



تمرین:

ماتریس آزادی را در مثال زیر بدست آورید (از روش شرط $W=I$) $\bar{r} = \frac{df}{n}$ عدد آزادی



$C_{\hat{V}} = RW^{-1}$ در این رابطه اگر W^{-1} و $C_{\hat{V}}$ وجود داشته باشد، ماتریس R بدست مـی‌آیـد. اگـر از مـاتریس R تِریس (مجموع درایه‌های قطر اصلی) گرفته شود پاسخ آن برابر درجه آزادی است.

$$\hat{V} = Rf = \left[I - B(B^t wB)^{-1} B^t w\right] f$$

$$\Rightarrow C_{\hat{V}} = \left[I - B(B^t wB)^{-1} B^t w\right] w^{-1} \left[I - wB(B^t wB)^{-1} B^t\right] =$$

$$\Rightarrow (w^{-1} - B(B^t wB)^{-1}B^t)(I - wB(B^t WB)^{-1}B^t) =$$

$$\Rightarrow w^{-1} - B(B^t wB)^{-1}B^t - B(B^t wB)^{-1}B^t + B(B^t wB)^{-1}(B^t wB)(B^t wB)^{-1}$$

$$\Rightarrow \left[I - BN^{-1}B^t w\right]w^{-1} = Rw^{-1} = RQ_L$$

یا

$$\Rightarrow \left[w^{-1} - BN^{-1}B^t\right]\left[I - wBN^{-1}B^t\right] = w^{-1} - BN^{-1}B^t - BN^{-1}B^t + BN^{-1}$$

$$(B^t wB)N^{-1}B^t = \left[I - BN^{-1}B^t w\right]w^{-1} = Rw^{-1} = RQ_L$$

نکته: ماتریس R خیلی مهم است. هرکجا R کنار هم بیاید می‌شود R و R به هر توانی برسد می‌شود خودش

$$R^n = R \quad Rw^{-1}R^t = Rw^{-1}$$

پردازش پس از سرشکنی برای کشف خطاها

همان گونه که می‌دانید، ماتریس آزادی رابطه زیر را با بردار مشاهده‌ها و بردار باقی‌مانده‌ها دارد.

$$\hat{V} = Rf = -R \times L$$

حال قرار است تأثیر خطای مشاهده‌ها روی $\hat{V}$ بدست آید. فرض کنید بردار مشاهده‌ها به اندازه ΔL خطا داشته باشد.

$$\tilde{L} = L + \Delta L$$

$\tilde{L}$: مشاهده‌های دارای خطا L: مشاهده‌ها ΔL: مقدار خطای مشاهده‌ها

$$\tilde{V} = -R(\tilde{L}) = -R(L + \Delta L) = \underset{\hat{V}}{-RL} - \underbrace{R(\Delta L)}_{\Delta V} = \hat{V} + \Delta V$$

ملاحظه می‌شود که ΔL باعث بزرگ شدن باقی‌مانده‌ها به اندازه ΔV خواهد شد. می‌توان گفت که این مشکل سبب بزرگ شدن مقدار فاکتور واریانس ثانویه نیز خواهد شد. $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\hat{V}^t w \hat{V}}{df}$

می‌توان گفت هرچه ماتریس آزادی بزرگ‌تر باشد، درصد خطای بیشتری از مشاهده‌ها روی باقی‌مانده‌ها منتقل می‌شود و چون تنها ابزاری که برای کشف خطا در دست است، همان باقی‌مانده‌هاست، در نتیجه با افزایش عدد آزادی کار کشف خطا بهتر انجام می‌شود.

خطای فاحش (G.E)[1]

به مشاهده‌هایی گفته می‌شود که دارای انحراف زیادی نسبت به مشاهده‌های دیگر باشند (به دلیل نقص دستگاه یا اشتباه نقشه بردار ایجاد می‌شوند)

Outliers

به باقی‌مانده‌هایی گفته می‌شود که از یک معیار آماری بزرگ‌تر باشند. در واقع، ابتدا outliers را تشخیص داده و سپس مشاهده متناظر با آن به عنوان G.E در نظر گرفته می‌شود. اگر $\hat{V}_2$ خطا داشته اشتباه باشد مشاهده مربوط به آن را حذف می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{V}_n \end{bmatrix} \longrightarrow \underset{\langle 1 \rangle}{\begin{bmatrix} 1_1 \\ 1_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1_n \end{bmatrix}}$$

$\langle 1 \rangle$: هیچ اطلاعاتی در مورد مشاهده‌ها وجود ندارد که کدام G.E است، پس به سراغ باقی‌مانده‌ها رفته که یک رابطه و روش آماری دارد؛ و به روش‌هایی در می‌یابیم که کدام باقی‌مانده outlier است. پس می‌توان نتیجه گرفت که مشاهده آن نیز G.E است و حذف می‌گردد.

اگر فرض شود تنها مشاهده iام خطایی به اندازه $\Delta 1_i$ دارد، آیا فقط باقی‌مانده iام تحت تأثیر قرار می‌گیرد؟

$$\Delta 1_i = \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \Delta 1_i \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} \Delta_i \hat{V} = -R \Delta_{iL} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta_i \hat{V}_1 \\ \Delta_i \hat{V}_2 \\ \vdots \\ \Delta_i \hat{V}_i \\ \vdots \\ \Delta_i \hat{V}_n \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1i} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2i} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ii} & \cdots & r_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{ni} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \Delta_i L \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{1i} & \Delta L_i \\ r_{2i} & \Delta L_i \\ \vdots & \vdots \\ r_{ii} & \Delta L_i \\ \vdots & \vdots \\ r_{ni} & \Delta L_i \end{bmatrix}$$

$$R = I - B(B^T B)^{-1} B^T$$

ماتریس R هیچ وقت قطری نسبت (W=I)

ملاحظه می‌کنید که وجود خطا در یک مشاهده تمام باقی‌مانده‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد. زمانی می‌توان واقعاً به مشاهده‌های اشتباه پی برد که باقی‌مانده مربوط به آن ($r_{ii} \Delta 1_i$) بزرگ‌تر از سایر باقی‌مانده‌ها شود (یعنی باید $r_{ii} > r_j k$ شود). یعنی عدد آزادی آن مشاهده بزرگ‌تر از سایرین باشد.

معیار آماری برای کشف Outlier

از دو آماره زیر استفاده می‌شود.

آماره نرمال استاندارد N: زمانی از این استفاده می‌شود که مقدار اولیه σ_0^2 مشخص است.

[1] Gross Error

$$\theta_1 = \frac{\hat{V}_i}{\sigma\hat{V}_i} \longrightarrow N_{\frac{\alpha}{2}}(0,1)$$

دستور برنامه متلب آماره نرمال استاندارد $\text{norminv}(\frac{\alpha}{2})$

آماره تاوو: زمانی از این استفاده می‌شود که σ_0^2 مشخص نیست و به جای آن از $\hat{\sigma}_0^2$ استفاده می‌شود.

$$\theta_2 = \frac{\hat{V}_i}{\sigma\hat{V}_i} \longrightarrow \tau_{\frac{\alpha}{2}}(df)$$

روش تابع t-student

$$\tau_{\frac{\alpha}{2}}(df) = \frac{\sqrt{df}\, t_{\frac{\alpha}{2}}(df-1)}{\sqrt{df-1+t_{\frac{\alpha}{2}}^2(df-1)}}$$

دستور برنامه متلب آماره تی‌استودنت (t): $tinv(\frac{\alpha}{2}, df)$

به مقدار $\frac{\hat{V}_i}{\sigma\hat{V}_i}$ باقی‌مانده‌های استاندارد شده گفته می‌شود.

$$C_{\hat{V}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{V}_1}^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \sigma_{\hat{V}_2}^2 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \sigma_{\hat{V}_3}^2 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{\hat{V}_n}^2 \end{bmatrix}$$

روش باردا (Baarda) برای کشف G.E

۱) انجام سرشکنی و بدست آوردن $\hat{V}$ و باقی‌مانده‌های استاندارد $\frac{\hat{V}_i}{\sigma\hat{V}_i}$

۲) آزمون باقی‌مانده‌های استاندارد با یک روش آماری.

۳) حذف مشاهده مربوط به بزرگ‌ترین باقی‌مانده استاندارد رد شده در آزمون.

۴) تکرار مرحله ۱ تا ۳ تا زمانی که هیچ باقی‌مانده استانداردی رد نشود.

۵) وارد کردن مشاهده‌های کنار گذاشته شده به ترتیب.

۶) اگر باقی‌مانده‌ای دوباره رد شد آن مشاهده G.E بوده و در غیر این صورت G.E نبوده و نباید حذف گردد.

نکته: تعداد G.Eها باید کمتر از درجه آزادی باشد.

کیفیت سرشکنی شبکه ژئودتیک

وقتی در مورد کیفیت صحبت می‌شود، به ماتریس واریانس کواریانس توجه می‌گردد $\sum_{i}^{n}\sum_{j}^{n} a_{ij}x^i y^j + e$ یا

$Q_{\hat{\Delta}} = C_{\hat{\Delta}}$ (ابعادش $u \times u$)

الف) توابع اسکالر عددی

ب) بیضی خطای مطلق

ج) بیضی خطای نسبی

د) قابلیت اعتماد : داخلی - خارجی

ه) منحنی پدال

الف) توابع اسکالر (عددی)

از آنجا که نمی‌توان تنها با ماتریس $Q_{\hat{\Delta}}$ به سادگی در مورد کیفیت نتایج بحث کرد، از طریق این ماتریس یک سری توابع عددی ایجاد کرده و در مورد آن‌ها تصمیم گرفته می‌شود.

1) A[1]Optimality (بهینه شدن دامنه)

2) S[2]Optimality (بهینه شدن طیف)

3) E[3]Optimality (بهینه شدن مقادیر ویژه)

4) N[4]Optimality (بهینه شدن نرمال)

5) D[5]Optimality (بهینه شدن دترمینان)

۱) A-optimality: مقادیر ویژه را حساب کرده و سعی می‌شود که مینیمم گردد هر کدام کوچک‌تر شد، بهتر است.

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \longrightarrow \min$$
$$h = rank(Q_{\hat{\Delta}}) = u - (d_d + d_c)$$

d_c : نقص شکل　　　d_d : نقص دیتوم

نکته: ماتریس $Q_{\hat{\Delta}}$ زمانی که نقص شکل و نقص دیتوم داشته باشد، کمبود رتبه خواهد داشت.

---
[1] Amplitude
[2] Spectra
[3] Eger Value
[4] Norm
[5] Determinant

۲) S-optimality: می‌گویند مقادیر ویژه به هم نزدیک است.

$$\frac{\lambda \max}{\lambda \min} \cong 1$$

۳) e-optimality:

$$\lambda_{\max} \longrightarrow \min$$

۴) N-optimality:

$$\left\| Q_{\hat{\Delta}} \right\| \longrightarrow \min$$

۵) D-optimality:

$$\det(Q_{\hat{\Delta}}) \longrightarrow \min$$

ب) بیضی خطای مطلق

پیش از بحث در مورد بیضی خطا، به توضیح SVD[1]پرداخته می‌شود.

SVD[2] یا تجزیه به مقادیر سینگولار: هر ماتریس $A_{n\times n}$ را می‌توان به سه ماتریس زیر تجزیه کرد:

$$A_{n\times m} = U_{n\times n} S_{n\times m} V_{m\times m}$$

S: یک ماتریس قطری است.

اگر A متقارن باشد، داریم:

$$SV^T = VSU^T \Rightarrow U^T = V^T$$

$$A = USU^T$$

برای زمانی که A یک ماتریس 2×2 متقارن و مثبت معین باشد، می‌توان به صورت زیر این تجزیه را انجام داد.

مثال: می‌خواهیم تجزیه مقادیر سینگولار ماتریس A را بدست آوریم (SVD) اولین کار این است که مقادیر ویژه آن را بدست آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - (Trace(A))\lambda + \det(A) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

برای هر λ یک بردار مقادیر ویژه وجود دارد.

[1] Singular Value Decomposition

[2] براي الگوريتم اين تجزيه در حالت كلی به مقاله زير مراجعه كنيد. Singular Value Decomposition In Image Compression

$$\lambda_1 = 6 \xrightarrow[\text{مقادیر ویژه}]{\text{قطر اصلی منهای}} \begin{bmatrix} 5-6 & 2 \\ 2 & 2-6 \end{bmatrix}$$

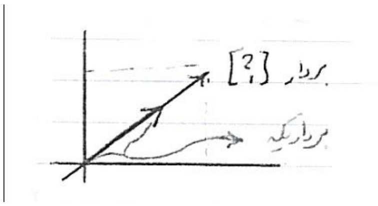
امتحان: اگر ماتریس بدست آمده در ماتریس اولیه ضرب شود، باید پاسخ آن به اندازه γ برابر ماتریس شود.

$$\xrightarrow{\text{امتحان}} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{بردار می‌شود بردار ویژه}]{\text{های ماتریس را تقسیم}}$$

$$\lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5-1 & 2 \\ 2 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{امتحان}} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بردار ویژه}} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

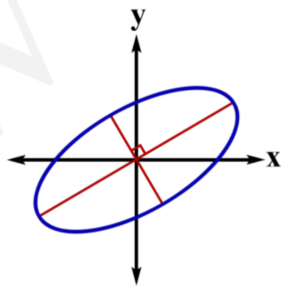
نکته: جهت هر دو بردار ویژه یکی است.



نکته: اگر A یک ماتریس کوفاکتور باشد، امتداد بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه بزرگ در راستای ماکسیمم خطا (قطر بزرگ بیضی خطا (a)) و امتداد بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه کوچک در راستای مینیمم خطا (قطر کوچک بیضی خطا (b)) می‌باشد.

در مثال پیش داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

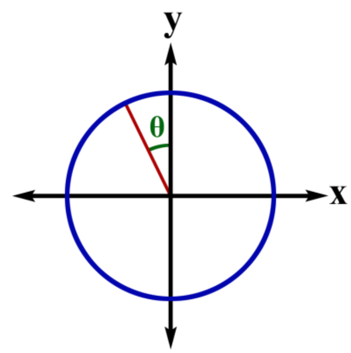


اگر منظور ژیزمان این جهت باشد (ژیزمان قطر بزرگ بیضی خطا) می‌شود:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63^\circ 26' 6''$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 26^\circ 33' 54''$$



مطمئناً ژیزمان قطر کوچک‌تر ۹۰ درجه با ژیزمان قطر بزرگ‌تر تفاوت دارد.

مثال: ژیزمان قطر بزرگ‌تر بیضی خطا را برای ماتریس زیر حساب کنید.

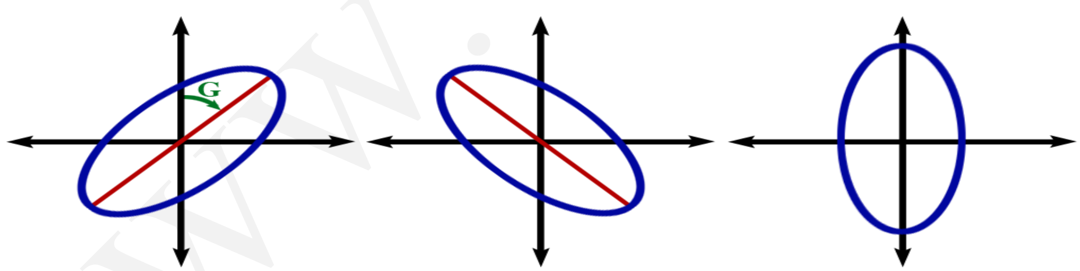
$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = 1$$

چون طول قطر بزرگ‌تر بیضی خواسته شده پس با مقدار ویژه بزرگ کار داریم (λ_1).

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2-5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(1/\sqrt{3}\right) = 30$$

مثال: شکل سؤال پیش کدام است.

باید ابتدا ژیزمان محاسبه شود سپس از روی ژیزمان شکل تشخیص داده شود.



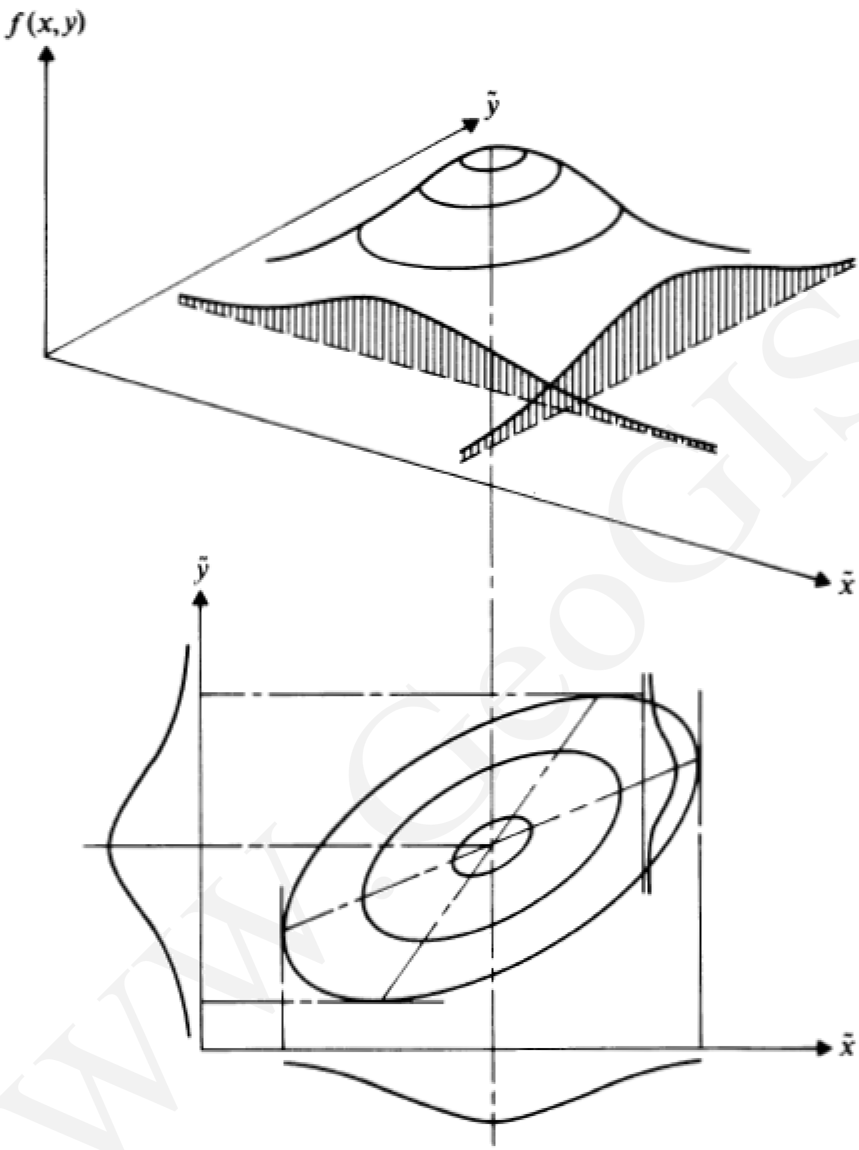
نکته: مقادیر ویژه (γها) هیچ زمانی منفی نمی‌شود زیرا ماتریس‌ها مثبت معین هستند و در ماتریس مثبت معین درایه‌های قطر اصلی آن همیشه بزرگ‌تر از در آیه‌های قطر فرعی آن است.

$$\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

بیضی خطای مطلق

نشانگر یک سطح اطمینان است و خطا را نشان نمی‌دهد و فقط یک سطح اطمینان است. برای اثبات ابعاد این بیضی با در نظر گرفتن آماره‌های زیر داریم (شب پیش از کنکور به آماره‌ها توجه کنید) :

$$\Delta x \frac{\overline{Q_{\hat{\Delta}}}}{\sigma_0^2} (\Delta x)^t \longrightarrow \chi^2_{(\alpha/2, 2)}$$



تابع کامل اسکور : از این تابع زمانی استفاده می‌شود که σ_0 مشخص باشد.

$$\Delta x \frac{\overline{Q_{\hat{\Delta}}}}{\hat{\sigma}_0^2} (\Delta x)^t \longrightarrow f_{(\frac{\alpha}{2}, df, 2)}$$

تابع فیشِر : زمانی از این تابع استفاده می‌شود که $\hat{\sigma}_0^2$ مشخص باشد.

محاسبه شبه معکوس ($^-$):

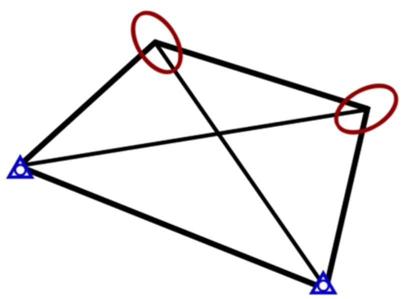
در مطلب از دستور (pinv (A)) برای بدست آوردن شبه معکوس یک ماتریس استفاده می‌شود و اگر ماتریس وارون پذیر باشد، کمبود رتبه نداشته باشد، همان معکوس[1]است، ولی اگر نباشد:

برای شبه معکوس گرفتن باید از SVD استفاده کرد و در آیه‌های قطر اصلی را وارونه کرد.

$$A_{n\times m}=USV^{t}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&4&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{شبه معکوس}}\begin{bmatrix}1/1&0&0&0&0&\\0&1/2&0&0&0&\\0&0&0&0&0&\\0&0&0&0&1/4&0\end{bmatrix}$$

اثبات کنید که این رابطه معادله یک بیضی است (برای حالت 2×2)

با یک مثال توضیح داده می‌شود.



$$Q_{\hat{\Delta}}=\begin{bmatrix}\sigma_{x_1}^2&\delta_{x_1y_1}&0&0\\\sigma_{y_1x_1}&\sigma_{y_1}^2&0&0\\0&0&\sigma_{x_2}^2&\sigma_{x_2y_2}\\0&0&\sigma_{y_2x_2}&\sigma_{y_2}^2\end{bmatrix}$$

برای هر نقطه تنها یک بیضی خطا خواهیم داشت. برای هر نقطه، از درایه‌های قسمت همان نقطه استفاده می‌شود.

$$(\Delta x)=([xy]-[\hat{x}\hat{y}])$$

$\hat{x}\hat{y}$: محاسبه شده $\qquad$ xy: مقدار واقعی

$$(\Delta x)=\frac{\overline{Q_{\hat{\Delta}}}}{\sigma_0^2}(\Delta x)^t$$

$$\Rightarrow([xy]-[\hat{x}\hat{y}])\frac{1}{\sigma_0^2}u_{2\times2}\begin{bmatrix}1/\lambda_1&0\\0&1/\lambda_1\end{bmatrix}u_{2\times2}^t\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{y}\end{bmatrix}\right)_{2\times1}<\chi^2_{(\alpha/2,2)}$$

$$\frac{1}{\sigma_0^2}[U_1U_2]\begin{bmatrix}1/\lambda_1&0\\0&1/\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\end{bmatrix}<\chi^2_{(\alpha/2,2)}$$

$$\Rightarrow\frac{u_1^2}{\sigma_0^2\lambda_1}+\frac{u_2^2}{\sigma_0^2\lambda_2}<\chi^2_{(\alpha/2,2)}=\frac{u_1^2}{\sigma_0^2\lambda_1\chi^2_{(\alpha/2,2)}}+\frac{u_2^2}{\sigma_0^2\lambda_2\chi^2_{(\alpha/2,2)}}<1$$

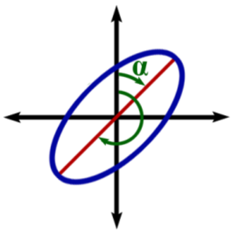
---
[1]Inverse

به یک معادله بیضی می‌رسیم: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

با فرض $\lambda_1>\lambda_2 \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{\sigma_0^2\lambda_1\chi^2{}_{(\alpha/2,2)}} \\ b=\sqrt{\sigma_0^2\lambda_2\chi^2{}_{(\alpha/2,2)}} \end{cases}$

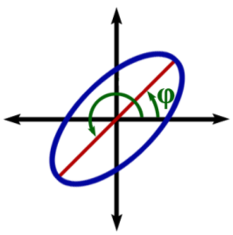
دو راه برای بدست آوردن جهت گیری بیضی وجود دارد.

۱) آزیموت قطر بزرگ‌تر



نکته: در تست کوچک‌تر را باید انتخاب کرد، یعنی از ۱۸۰ درجه کم شود.

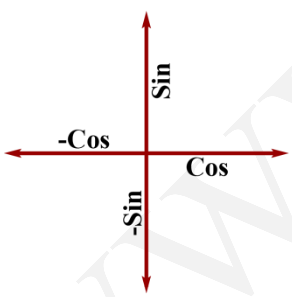
۲) زاویه مثلثاتی قطر بزرگ‌تر



نکته: در تست کوچک‌تر را باید انتخاب کرد، یعنی از ۱۸۰ درجه کم شود.

۱) آزیموت قطر اطول

از رابطه $\tan(2\alpha)=\left|\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2-\sigma_x^2}\right|$ مقدار 2α را یافته و سپس برای تعیین ناحیه صحیح آن مقدار 2α صحیح بدست آورده می‌شود. بدین صورت که علامت صورت برای sin و علامت مخرج cos قرار داده می‌شود.



۲) زاویه مثلثاتی قطر بزرگ‌تر

برای φ نیز رابطه $\tan(2\alpha)=\left|\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2-\sigma_x^2}\right|$ می‌شود، مقدار 2φ را یافته و سپس برای تعیین ناحیه صحیح آن مقدار φ صحیح بدست آورده شود.

مثال: اگر $\chi^2{}_{(\alpha/2,2)}=4$ و $\sigma_0^2=1$ باشد، بیضی خطای مطلق مربوط به نقاط ۱ و ۲ را در شبکه زیر ترسیم کنید.

$$Q_{\hat{\Delta}}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 4 & -\sqrt{3}\\ -1 & 1 & -\sqrt{3} & 2\end{bmatrix}\Rightarrow Q_{\hat{\Delta}_1}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma_{x_1}^2=5 & \sigma_{x_1y_1}^2=2\\ \sigma_{y_1x_1}^2=2 & \sigma_{y_1}^2=2\end{cases}$$

$$\lambda^2-7\lambda+6=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=6\\ \lambda_2=1\end{cases}$$

$$a=\sqrt{\sigma_0^2\chi^2\lambda_1}=\sqrt{1\times4\times6}=\sqrt{24}$$

$$b=\sqrt{\sigma_0^2\chi^2\lambda_1}=\sqrt{1\times4\times1}=\sqrt{4}=2$$

۱- آزیموت :

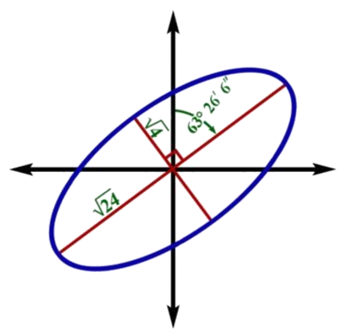
$$\tan(2\alpha)=\left|\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2-\sigma_x^2}\right|=\left|\frac{2(2)}{2-5}\right|=\left|\frac{4}{-3}\right|\Rightarrow 2\alpha=25^\circ7'48''$$

حال با توجه به علامت صورت و مخرج ناحیه مثلثاتی مشخص می‌شود و از محور X آن بدست آورده می‌شود، پس:

$2\alpha=180-53^\circ7'48''\Rightarrow\varphi=63^\circ26'6''$ آزیموت قطر اطول

یا

$$2\alpha=53^\circ7'48''\Rightarrow\alpha'=\frac{53^\circ7'48''}{2}\Rightarrow\alpha=90^\circ-\alpha'=63^\circ26'6''$$



- حال از روش دوم محاسبه می‌شود.

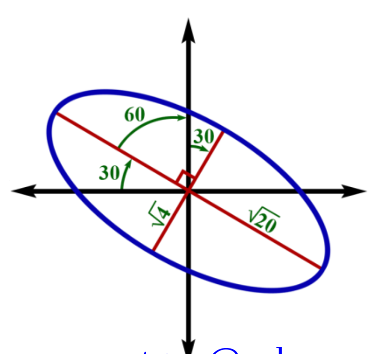
$$\tan(2\varphi)=\left|\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2-\sigma_x^2}\right|=\left|\frac{4}{3}\right|\Rightarrow 2\varphi=53^\circ7'48''\Rightarrow\varphi=26^\circ33'54''$$

برای نقطه دوم :

$$Q_{\hat{\Delta}_2}=\begin{bmatrix}4 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\sigma_{x_2}^2=4 & \sigma_{x_2y_2}^2=-\sqrt{3}\\ \sigma_{y_2x_2}^2=-\sqrt{3} & \sigma_{y_2}^2=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lambda^2-6\lambda+5=0\Rightarrow\lambda_1=5\ ,\ \lambda_2=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{\sigma_0^2\chi^2\lambda_1}=\sqrt{1\times4\times5}=\sqrt{20}\\ b=\sqrt{\sigma_0^2\chi^2\lambda_1}=\sqrt{1\times4\times1}=\sqrt{4}=2\end{cases}$$



$$\tan(2\alpha) = \left|\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}\right| = \left|\frac{2(-\sqrt{3})}{2-4}\right| = \left|\frac{-\sqrt{12}}{-2}\right| \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha' = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 90 - 30 = 60^\circ$$

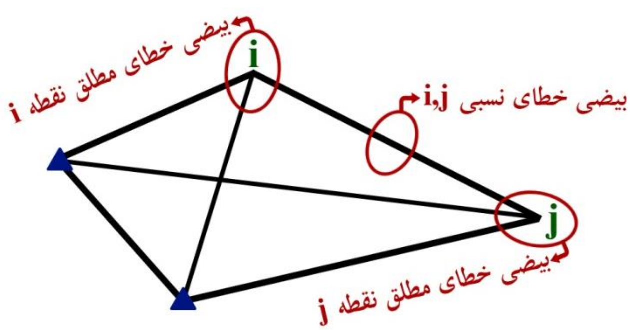
ج) بیضی خطای نسبی

عیب بیضی خطای مطلق آن است که این بیضی به سیستم مختصات وابسته است. بنابراین، با دور شدن از نقاط ثابت شبکه، ابعاد این بیضی بزرگ خواهد شد.

برای حل این مشکل، از بیضی خطای نسبی استفاده می‌شود. در واقع این بیضی مربوط به اختلاف مختصات بین هر دو نقطه دلخواه است. ابعاد این بیضی کوچک‌تر از بیضی خطای مطلق بوده و در وسط خط و اصل بین دو نقطه ترسیم می‌شود.

- فرض کنید قرار است بیضی خطای نسبی بین دو نقطه i , j بدست آید.

مثال: یک شبکه که دو نقطه ثابت دارد.



نکته: معمولاً بیضی خطا با مقیاس بزرگی ترسیم می‌شود تا دیده شود.

دلیل کوچک‌تر بوده بیضی خطای نسبی نسبت به بیضی خطای مطلق این است که چون خطای مشترک بین دو نقطه در حالت نسبی حذف می‌شود.

نکته: هرچه نقطه از نقاط ثابت دورتر باشد، بیضی خطای آن بزرگ‌تر و هر چه نزدیک‌تر باشد، بیضی خطای آن کوچک‌تر می‌شود.

در GPS:

در روش مطلق GPS در یک نقطه مستقر و حدود ۲۰ دقیقه ثابت نگه داشته می‌شود تا مختصات بدست آید و دقت آن کمتر از دقت روش نسبی است.

در روش نسبی GPS در یک نقطه مستقر و مختصات آن را بدست آورده می‌شود (از روش مطلق)، یک GPS دیگر را به صورت متحرک قرار داده و در این حالت خطا کمتر می‌شود. در حالت مطلق خطاها همه در آن نقطه جمع

می‌شوند، ولی در روش نسبی نقطه‌ای هم به صورت متحرک داده می‌شود و در این حالت خطا کمتر می‌شود و با نقطه ثابت باعث می‌شود که خطاها همدیگر را خنثی و خطا کمتر شود (در روش نسبی مختصات نقطه در حال حرکت نسبت به GPS ثابت بدست می‌آید).

در روش نسبی موقعیت ماهواره به روش دیفرانسیلی محاسبه می‌شود. DGPS

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x_{ij}=x_j-x_i\\ \Delta y_{ij}=y_j-y_i\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\x_j\\y_j\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{\Delta x,\Delta y}=\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xi}^2&\sigma_{xiyi}&\sigma_{xixj}&\sigma_{xiyj}\\ \sigma_{yixi}&\sigma_{yi}^2&\sigma_{yixj}&\sigma_{yiyi}\\ \sigma_{xjxi}&\sigma_{xjyi}&\sigma_{xj}^2&\sigma_{xjyj}\\ \sigma_{yixj}&\sigma_{yjyi}&\sigma_{yixj}&\sigma_{yj}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}=$$ ماتریس کوفاکتور نسبی

این حاصل‌ضرب یک ماتریس 2×2 و متقارن خواهد بود. اگر مانند بیضی خطای مطلق برای این ماتریس نیز عمل شود، بیضی خطای نسبی بدست می‌آید.

مثال: اگر در یک سرشکنی، ماتریس کوفاکتور مجهولات برآورد شده به صورت زیر باشد $\chi^2=1$ و $\sigma_0^2=1$، مطلوب است :

الف) بیضی خطای مطلق نقطه ۲

ب) بیضی خطای نسبی نقطه ۱ و ۳

$$Q_{\hat{\Delta}}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}x_1&y_1&x_2&y_2&x_3&y_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}4&1&2&-2&1&1\\1&16&-2&3&-1&-1\\2&-2&9&-2&2&1\\-2&3&-2&10&1&2\\1&-1&2&1&4&-1\\1&-1&1&2&-1&5\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}x_1\\y_1\\x_2\\y_2\\x_3\\y_3\end{array}$$

الف) محل تقاطع سطر و ستون چهارم می‌شود:

$$Q_2=\begin{bmatrix}9&-2\\-2&10\end{bmatrix}$$

ب) سطر و ستون سوم و چهارم حذف می‌شود (سطر و ستون مربوط به نقطه ۲ حذف شود).

$$Q_{\Delta_{1,3}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -17 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 23 \end{bmatrix}$$

برای کنترل باید ماتریس بدست آمده، متقارن باشد (ولی در این مثال به صورت اتفاقی ماتریس هم متقارن و هم قطری است).

نکته: مقادیر ویژه یک ماتریس قطری معادل درایه‌های قطر اصلی است.

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 23 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6-23 & 0 \\ 0 & 23-23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \end{bmatrix}$$ بردار ویژه

$$Tan(2\alpha) = \left| \frac{0}{23-6} \right| = \frac{0}{17} \Rightarrow 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

اگر در ماتریس بدست آمده $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 23 \end{bmatrix}$ مقادیر دو درایه ۲۳ و ۶ با هم برابر، و دو درایه دیگر صفر باشد در این صورت بیضی خطای دایره خواهد بود.

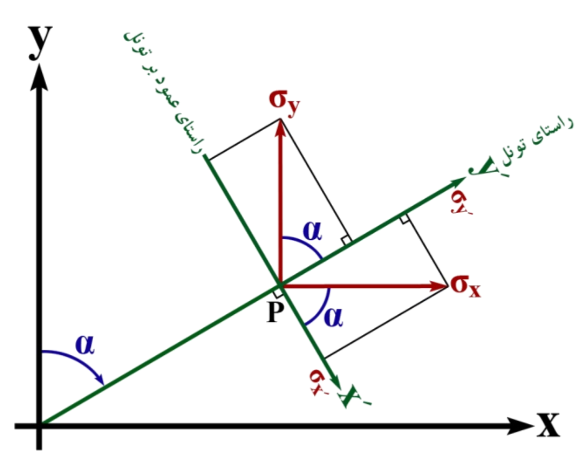
د) منحنی پدال[1]

فرض کنید، خطا در راستای y, x برای نقطه p برابر σ_x, σ_yباشد، مطلوب است مقدار خطا در راستایی که آزیموت α دارد و نیز در راستای عمود بر آن. $(\sigma_{x'}, \sigma_{y'})$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos\alpha - \sigma_y \sin\alpha$$
$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin\alpha - \sigma_y \cos\alpha$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix}$$

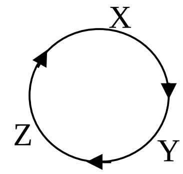


[1] Pedal Curve

اگر دقت شود، این رابطه یک دوران را نشان می‌دهد.

$$M_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \sin\omega \\ 0 & -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \qquad M_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$M_\kappa = \begin{bmatrix} \cos k & \sin k & 0 \\ -\sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



در هر دوران روی دورانی که حول آن محور است، دست گذاشته می‌شود.

مثال: در یک تونل با آزیموت 60° اگر $\sigma_y = -8^{cm}$, $\sigma_x = 5^{cm}$ باشد، خطا در راستای عمود بر تونل چقدر است.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos60 & -\sin 60 \\ \sin 60 & \cos 60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -93 \\ 0.33 \end{bmatrix}$$

33^{mm} در راستای تونل و -93^{mm} در راستای عمود بر تونل خطا وجود دارد.

* علامت منفی 93^{mm} بدین خاطر است که در این سؤال سیستم مختصات در تونل دسته چپی فرض شده است.

می‌خواهیم واریانس‌های دوران را بدست آوریم :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

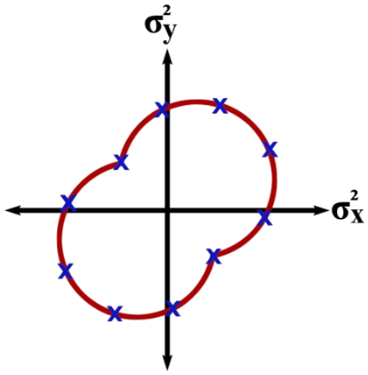
$$Q_{x',y'} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 \cos\alpha - \sigma_{xy} \sin\alpha & \sigma_{xy} \cos\alpha - \sigma_y^2 \sin\alpha \\ \sigma_x^2 \sin\alpha + \sigma_{xy} \cos\alpha & \sigma_{xy} \sin\alpha + \sigma_y^2 \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'}^2 & \sigma_{x'y'} \\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \cos^2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha - 2\sigma_{xy} \sin\alpha\cos\alpha & \\ & \sigma_x^2 \sin^2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2\alpha + 2\sigma_{xy} \sin\alpha\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{x'}^2 = \sigma_x^2 \cos^2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha - 2\sigma_{xy} \sin\alpha\cos\alpha \\ \sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 \sin^2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2\alpha + 2\sigma_{xy} \sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

اگر تابع بالا بر حسب α رسم شود، منحنی به شکل زیر بدست می‌آید و به دلیل شباهت آن با پدال به آن منحنی پدال گفته می‌شود.



* دستور برنامه متلب برای رسم منحنی پدال ezpolar

ترسیم پدال : معادله پیش را به شکل ماتریس نوشته و به α عدد داده می‌شود. مثلاً صفر و یک جواب به ما می‌دهد یک علامت زده می‌شود و … همین گونه ادامه داده شود تا منحنی رسم شود. این منحنی باید به شکل پدال و متقارن باشد.

* منحنی پدال، واریانس‌ها را در هر راستای دلخواه نشان می‌دهد

* منحنی پدال نشانگر سطح اطمینان نیست (بیضی خطا)

* منحنی پدال خطا در راستای دلخواه نیست (صفحه پیش، راستاها)

مقدار ماکسیمم و مینیمم طول در چه αای است؟

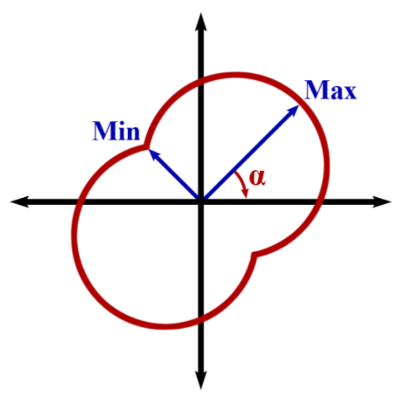
می‌خواهیم بدانیم در چه آزیموتی مقدار واریانس ماکسیمم است جهت این کار از رابطه مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\partial\frac{\sigma_{x'}^2}{\partial x}=0 \Rightarrow -2\sigma_x^2\sin\alpha\cos\alpha+2\sigma_y^2\sin\alpha\cos\alpha-2xy\sin^2\alpha=0$$

$$\Rightarrow -\sigma_x^2\sin(2\alpha)+\sigma_y^2\sin(2\alpha)-2\sigma_{xy}\overbrace{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}^{\cos(2\alpha)}=0$$

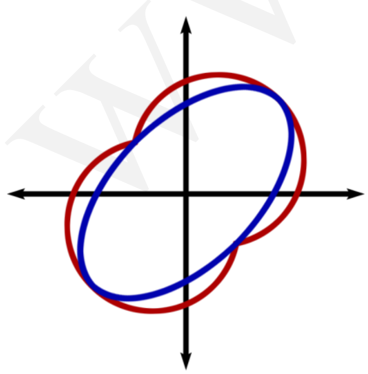
$$\Rightarrow \sin(2\alpha)\left[\sigma_y^2-\sigma_x^2\right]=2\sigma_{xy}\cos(2\alpha)$$ طرفین تقسیم بر $\cos(2\alpha)$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha)=\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2-\sigma_x^2}$$



بیضی خطای مطلق استاندارد

اگر داخل منحنی پدال یک بیضی رسم شود، آن را بیضی خطای مطلق استاندارد گویند. یعنی مقدار $\chi^2=1$ شود.



برای ترسیم بیضی نخست باید در معادله $\sigma_{x'}^2$ ابتدا مقدار در α قرار داد و پاسخ را بدست آورد. حال بار $\alpha+90$ را در α قرار می‌دهیم و جواب را بدست آورده شود. اگر پاسخ این یکی بزرگ‌تر شد، باید از معادله $\sigma_{y'}^2$ برای رسم بیضی استفاده کرد در غیر این صورت از همین رابطه $\sigma_{x'}^2$ با مقدار دهی به α بیضی رسم می‌شود.

ه) قابلیت اعتماد

۱) قابلیت اعتماد داخلی

به مقدار برآوردی از کمترین خطای قابل کشف به وسیله‌ی شبکه گفته می‌شود یا به بیان دیگر، بزرگ‌ترین خطای غیرقابل کشف قابلیت اعتماد داخلی (قابلیت اطمینان داخلی) می‌گویند.

مثال: اگر قابلیت اعتماد داخلی برای شبکه‌ای 30^{mm} باشد،

یعنی کوچک‌ترین خطای قابل کشف به وسیله‌ی شبکه 30^{mm} است، یعنی کوچک‌تر از 30^{mm} را نمی‌توان کشف یا بزرگ‌ترین خطایی که شبکه نمی‌تواند کشف کند، 30^{mm} است.

نمی‌توان ⟵ 30 ⟶ می‌توان

دیگر نمی‌توان ⟵ 29 , 30 31 32 50

هرچه، مقدار قابلیت اعتماد داخلی کمتر باشد، بهتر است.

از طریق رابطه زیر می‌توان به برآوردی از این کمیت دست یافت.

$$\nabla_i = \delta_i \frac{\sigma_{Li}^2}{\sigma_{\hat{V}_i}} \qquad \text{که} \qquad \delta_i = \mathrm{norminv}(1-\alpha) + \mathrm{norminv}(1-\beta)$$

معرفی $1-\beta, 1-\alpha, \alpha, \beta$

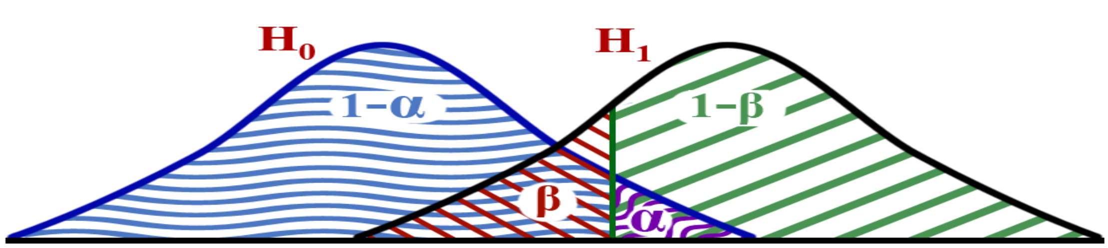
فرض صفر : برای آزمون هر آماده‌ای، یک فرض صفر در نظر گرفته می‌شود.

مثال:

فرض صفر: سکه سالم است $=H_0$

فرض یک: فرض خلاف فرض صفر را گوییم. سکه ناسالم است $=H_1$

برای هر فرض یک تابع توزیع وجود دارد.



مثال:

$\alpha = P$ خطای نوع اول (رد $\mathrm{H_0}$ | درست بوده $\mathrm{H_0}$)

$= P$ (سکه ناسالم | سکه سالم بوده)

سطح اطمینان $= 1-\alpha$

$\beta = P$ خطای نوع دوم (رد $\mathrm{H_1}$ | درست بوده $\mathrm{H_1}$)

$= P$ (قبول $\mathrm{H_1}$ | غلط بوده $\mathrm{H_1}$)

یا

$= P$ (سکه ناسالم بوده | سکه سالم)

توان آزمون (قدرت آزمون) $= 1-\beta$

اگر مقدار α سطح اطمینان کوچک باشد، خوب است و هم چنین، اگر β نیز کوچک باشد، خوب است. یعنی آزمونی خوب است که خطای نوع اول و نوع دوم آن کوچک باشد، ولی با توجه به شکل می‌توان درک کرد که نمی‌توان هر دو را کوچک کرد. پس باید یک حالت میانه را در نظر گرفت.

مثال: اگر $\sigma_{L_1} = 1^{mm}$, $\sigma_{V_1} = 0.1^{mm}$ باشد، قابلیت اعتماد داخلی را برای $\beta = 0.3$, $\alpha = 0.3$ بدست آورید.

$$\delta_i = \mathrm{norminv}(\overset{0.7}{1-\alpha}) + \mathrm{norminv}(\overset{0.7}{1-\beta}) \Rightarrow \delta_i = 1+1 = 2$$

$$\Rightarrow \nabla_i = \delta_i \frac{\sigma_{L_i}^2}{\delta_{\hat{V}_i}} = 2 \times \frac{1^2}{0.1} = 20$$

از رابطه $Q_V = Rw^{-1}$، با افزایش اعداد آزادی مقادیر $\sigma_{\hat{V}}$ افزایش یافته و در نتیجه، مقدار ∇_i کاهش و شبکه می‌تواند خطاهای کوچک‌تری را کشف کند.

۲) قابلیت اعتماد خارجی

تأثیر خطاهای کشف نشده روی مجهولات برآورد شده را می‌گویند.

$$\hat{\Delta}_i = (B^t w_e B + D^t D)^{-1} B^t w_e l$$

$$\Delta_i = (B^t w_e B + D^t D)^{-1} B^t w_e (\nabla_L)$$

D : نقص دیتوم $\qquad$ ∇_L : خطای مشاهده‌های کشف نشده

برای ارائه برآوردی از قابلیت اعتماد خارجی، از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\Delta_i = \delta i \left(\frac{1-r_i}{r_i}\right)$$

r_i: درایه‌های قطر اصلی ماتریس آزادی (اعداد آزادی)

با افزایش اعداد آزادی، Δ_i کاهش یافته و قابلیت اعتماد خارجی نیز بهتر می‌شود (افزایش می‌یابد)

تعداد مشاهده‌های شبکه

۱) تعداد زاویه‌ها در شبکه

تعداد زاویه‌های قابل اندازه گیری در یک شبکه را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$p(p-2)$$

مثال:شبکه‌ای دارای ۶۰ ایستگاه می‌باشد، تعداد زاویه‌های قابل قرائت چقدر است.

$$p(p-2) \text{ زاویه } \quad \Rightarrow \quad 6(6-2)=6\times4=24$$

۲) تعداد طول‌ها در شبکه

تعداد طول‌های قابل اندازه گیری در یک شبکه را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

مثال: برای شبکه مثال پیش تعداد طول‌ها را حساب کنید.

$$\frac{p(p-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{6(5)}{2}=3\times5=15 \quad \text{طول}$$

۳) تعداد امتداد در شبکه

تعداد امتدادهای قابل قرائت در یک شبکه را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$p(p-1)$$

مثال: برای شبکه بالا تعداد امتداد را حساب کنید.

$$p(p-1) \Rightarrow 6\times5=30 \qquad \text{امتداد}$$

عدد آزادی

در آیه‌های ماتریس آزادی را عدد آزادی می‌گویند، که هر کدام نشان دهنده سهم هر مشاهده است و بین ۰ تا ۱ می‌باشد عدد آزادی متوسط را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{r}=\frac{df}{n}$$

$\bar{r}$: عدد آزادی متوسط

مثال: اگر شبکه‌ای مسطحاتی دارای ۱۲ ایستگاه باشد و مشاهده‌های ما امتدادها و طول‌ها در هر ایستگاه باشد عدد آزادی متوسط چقدر است؟

$$\bar{r} = \frac{df}{n}$$

n= تعداد مشاهده‌های امتداد + تعداد مشاهده‌های طول

مشاهده‌های طول $= \frac{p(p-1)}{2} = \frac{12}{2} \times 11 = 6 \times 11 = 66$

مشاهده‌های امتداد $= p(p-1) = 12 \times 11 = 132 \quad \Rightarrow \quad n = 132 + 66 = 198$

$$df = n - u \quad \Rightarrow \quad u = 2P + \overset{\Omega_0}{P} + defct$$

p: چون مشاهده‌های امتداد در هر ایستگاه وجود دارد، به همان تعداد ایستگاه‌ها مجهول صفر لمب (Ω_0) خواهیم داشت.

$$\Rightarrow u = 24 + 12 + 3 = 39$$

3 : دو انتقال و یک دوران   12 : به تعداد امتدادها صفر لمب داریم   24 : x و y هر ایستگاه

$$\Rightarrow df = 198 - 39 = 159 \quad \Rightarrow \quad \bar{r} = \frac{159}{198} = \frac{53}{66} = 0.8$$

روی هم رفته شبکه‌های ژئودزی شبکه‌ای که عدد آزادی متوسط آن از ۰/۵ بیشتر باشد، شبکه خوبی است.

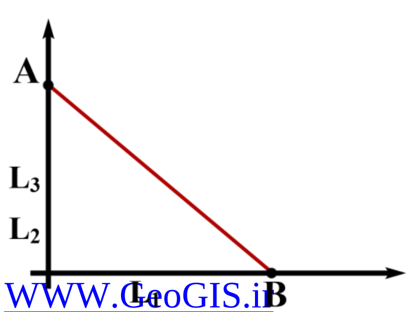
ماتریس آزادی

$$R = (I - B(B^tWB)^{-1}B^tW) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$\text{Trace}(R) = df$$

مثال: در شکل زیر اعداد آزادی را مشخص کنید.

با توجه به شکل برای دو نقطه مجهول A و B، تنها دو مجهول وجود دارد. (Xb ,Ya)

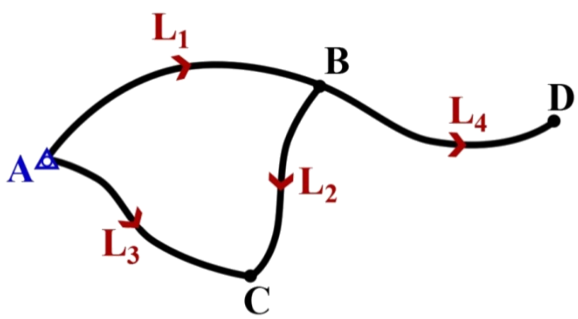


$\Rightarrow n = 3 \quad , \quad u = 2 \quad \Rightarrow \quad df = 1$

$r_{22} \quad , \quad r_{23} = \frac{1}{2} \quad , \quad r_{11} = 0$

$r_{11} = 0$: زیرا قابل کنترل نیست.

اعداد آزادی شبکه زیر را مشخص کنید.



n=4
u=3
df=1

$r_{11} \quad , \quad r_{22} \quad , \quad r_{33} = \frac{1}{3} \quad , \quad r_{44} = 0$

فصل سوم

طولیابی

به صورت کلی به چهار روش می‌توان طولیابی کرد :

۱- **روش مکانیکی** : استفاده از متر، زنجیر مساحی و ...

دارای خطاهای قرائت، کشیدگی، انبساط و انقباض و... است.

۲- **روش اپتیکی** : مثل روش استادیمتری

دارای خطاهای قرائت، عمود نبودن شاخص، انبساط و انقباض و... است.

۳- **روش الکتریکی** : مثل دستگاه‌های EDM

EDMها به دو دسته تقسیم می‌شوند :

الف) EDMهایی که از نور مرئی با طول موج‌های $0.4\mu < \lambda < 1\mu$ استفاده می‌کنند.

مثل طولیاب‌های توتال استیشن

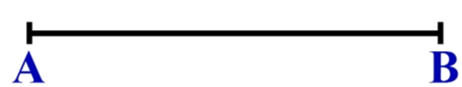
ب) EDMهایی که از نور رادیویی با طول موج‌های چند سانتیمتر استفاده می‌کنند، مثل : تلرومتر

۴- روش اینترفرومتری (تداخل سنجی امواج)

روش ۳ خود به دو روش انجام می‌شود.

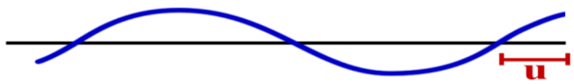
۱- روش ده دهه :

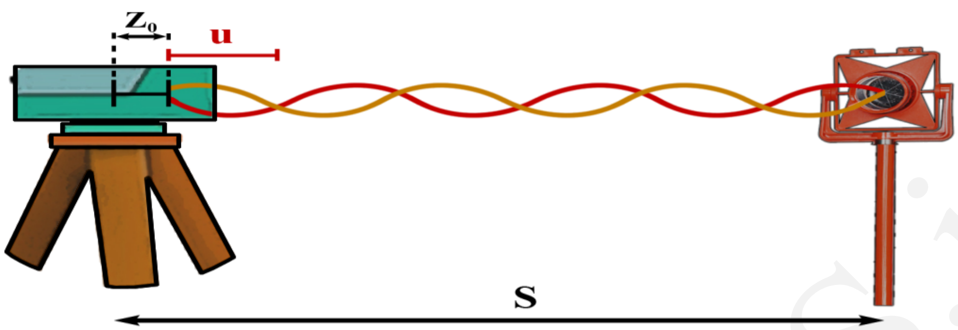
$$\begin{array}{rrcrcr}
\frac{\lambda}{2} = & 1000 & \xrightarrow{\text{ارسال}} & 5689 & \Rightarrow & 5 \\
& 100 & \xrightarrow{\text{ارسال}} & 834 & \Rightarrow & 58 \\
& 10 & \xrightarrow{\text{ارسال}} & 52 & \Rightarrow & 585 \\
& 1 & \xrightarrow{\text{ارسال}} & 1 & \Rightarrow & 5851
\end{array}$$



$\overline{AB} = 5851$

۲- روش اختلاف فاز : به مقدار اعشاری یک طول موج کامل، اختلاف فاز گفته می‌شود.





$$S = m(\frac{\lambda}{2}) + u + z_0$$

u: اختلاف فاز که اندازه گیری می‌شود.

Z_0 : تصحیح صفر دستگاه : فاصله‌ی بین مرکز استقرار دستگاه با مرکز طولیابی دستگاه.

m : تعداد نصف طول موج‌های کامل (ابهام فاز).

با این یک معادله، نمی‌توان دو مجهول s , m را بدست آورد. در عمل، از دو طول موج λ_2 , λ_1 که طول موجشان خیلی به هم نزدیک است (تا m تغییر نکند)، استفاده می‌کنند.

$$s = m(\frac{\lambda_1}{2}) + u_1 \longrightarrow \quad \text{طول موج اول}$$

$$s = m(\frac{\lambda_2}{2}) + u_2 \longrightarrow \quad \text{طول موج دوم}$$

$$\Rightarrow m(\frac{\lambda_1}{2}) - m(\frac{\lambda_2}{2}) = u_2 - u_1 \Rightarrow m = \frac{2(u_2 - u_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\Rightarrow s = \lambda \frac{u_2 - u_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + u_1$$

خطاهای طولیابی

از معادله موج داریم:

$$n = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{c}{n}$$

c : سرعت موج در خلأ   n : ضریب شکست محیط   v : سرعت موج در محیط

$$V = \lambda f \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{f} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{nf}$$

f : فرکانس

$$s = m(\frac{\lambda}{2}) + \overset{\langle 1 \rangle}{u + z_0} \;\Rightarrow\; s \cong m(\frac{\lambda}{2}) \;\Rightarrow\; s \cong m(\frac{c}{2nf})$$

$\langle 1 \rangle$: مقدار این دو کم است.

$$\sigma_s^2 = \sigma_u^2 + \sigma_{z_0}^2 + (\frac{m}{2nf})^2\sigma_c^2 + (\frac{-mc}{2n^2f})^2\sigma_n^2 + (\frac{-mc}{2nf^2})^2\sigma_f^2$$

در c ضرب و تقسیم می‌کنیم

$$\sigma_s^2 = \underbrace{(\sigma_u^2 + \sigma_{z_0}^2)}_{a_1^2} + \underbrace{\left[(\frac{\sigma_c}{c})^2 + (\frac{\sigma_n}{n})^2 + (\frac{\sigma_f}{f})^2\right]}_{b_1^2} s^2 \;\Rightarrow\; \sigma_s^2 = a_1^2 + b_1^2 s^2$$

بر اساس بست تیلر با تقریب داریم $\Rightarrow \sigma_s \cong \pm a \pm bs$

بر اساس بست تیلر داریم:

$$(a^2 + b^2s^2)^{0.5} \xrightarrow{\text{بست تیلر}} \cong (\sqrt{a^2} + \frac{\sqrt{b^2s^2}}{2})$$

در حالت ماکسیمم می‌شود :

$$\sigma_s = a + bs$$

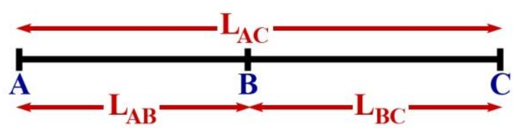
نکته: به همین دلیل، دقت طولیاب را به صورت $a+b^{ppm}$ نشان می‌دهند :

a : عددی مطلق بوده و شامل خطای z_0 و اختلاف فاز است.

b : عددی نسبی بوده و شامل خطای فرکانس، سرعت و ضریب شکست است.

تعیین خطای z_0 به صورت عملی

در ساده‌ترین حالت (بدون سرشکنی) از رابطه زیر بدست می‌آید :



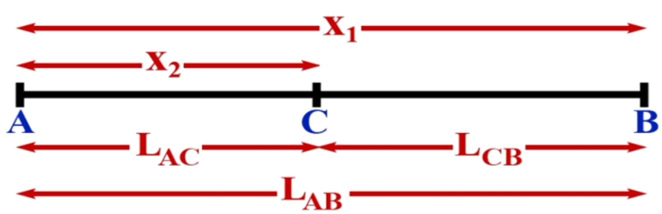
$$\begin{cases} L_{AB+Z_0} \\ L_{AC+Z_0} \Rightarrow (L_{AB+Z_0}) + (L_{AC+Z_0}) - (L_{BC+Z_0}) = 0 \\ L_{BC+Z_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_{AB} + L_{BC} - L_{AC} = -Z_0 \;\Rightarrow\; Z_0 = L_{AC} - (L_{AB} + L_{BC})$$

این را نمی‌توان سرشکنی کرد زیرا سه مجهول $(\overline{AB}, \overline{BC}, Z_0)$ و سه معادله وجود دارد.

مثال: در شکل زیر، مقدار واقعی طول $L_{AB}=\hat{\hat{L}}_{AB}$ می‌باشدz_0 را بدست آورید.

$\hat{\hat{L}}$: نشان دهنده مقدار واقعی یا همان کانسترینت است.



یک درجه آزادی وجود دارد زیرا سه مشاهده و یک کانسترینت که می‌شود ۴ معادله، ولی سه مجهول بیشتر نداریم، پس یک درجه آزادی وجود دارد.

معادله‌های پارامتریک
$$\begin{cases} L_{AC}+z_0-x_2=0 \\ L_{AB}+z_0-x_1=0 \\ L_{CB}+z_0-(x_1-x_2)=0 \end{cases}$$

یک کانسترینت $\{x_1-\hat{\hat{L}}_{AB}=0$

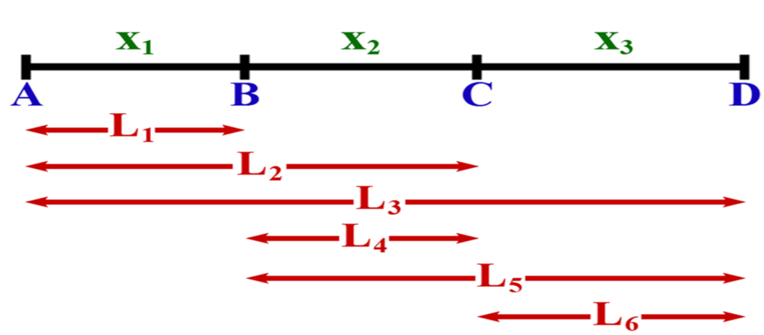
چون این کانسترینت مطلق است، نیازی به رابطه نویسی نیست و فقط کافی است جای x_1 در معادله‌های پارامتریک، مقدار $\hat{\hat{L}}_{AB}$ قرار داده شود.

$$\Rightarrow \begin{cases} L_{AC}+z_0-x_2=0 \\ L_{AB}+z_0-\hat{\hat{L}}_{AB}=0 \\ L_{CB}+z_0-\hat{\hat{L}}_{AB}+x_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (L_{AC}+L_{AB}+L_{CB})+3Z_0-2\hat{\hat{L}}_{AB}=0 \quad \Rightarrow \quad Z_0=\frac{-(L_{AC}+L_{AB}+L_{CB})+3Z_0-2\hat{\hat{L}}_{AB}}{3}$$

نکته:کانسترینت مطلق یعنی وزن ندارد و باید در نهایت همین که هست شود.

مقدار z_0 بهتر است از روش سرشکنی بدست آید :



در سه حالت حل می‌شود :

حالت نخست:

$$\begin{cases} L_1+Z_0-x_1=0 \\ L_2+Z_0-x_1-x_2=0 \\ L_3+Z_0-x_1-x_2-x_3=0 \\ L_4+Z_0-x_2=0 \\ L_5+Z_0-x_2-x_3=0 \\ L_6+Z_0-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Z_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- دقت کنید، Z_0 نیز مجهول است.

$$w_e \; , f \; = \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \\ -L_3 \\ -L_4 \\ -L_5 \\ -L_6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} Z_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (B^t w_l B)^{-1} B^t w_e f$$

حالت دوم :

از پیش معلوم بودن طول‌ها با وزن داده شده w_c

معادله‌های آن به این صورت می‌شود :

$$\text{پارامتریک} \begin{cases} L_1+Z_0-x_1=0 \\ L_2+Z_0-x_1-x_2=0 \\ L_3+Z_0-x_1-x_2-x_3=0 \\ L_4+Z_0-x_2=0 \\ L_5+Z_0-x_2-x_3=0 \\ L_6+Z_0-x_3=0 \end{cases}$$

$$\text{کانسترینت} \begin{cases} x_1=\hat{\hat{L}}_{AB} \\ x_2=\hat{\hat{L}}_{BC} \\ x_3=\hat{\hat{L}}_{CD} \end{cases} \Rightarrow \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad g=\begin{bmatrix} \hat{\hat{L}}_{AB} \\ \hat{\hat{L}}_{BC} \\ \hat{\hat{L}}_{CD} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} Z_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} w_L & 0 \\ 0 & w_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} w_L & 0 \\ 0 & w_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right)$$

حالت سوم :

معلوم بودن طول‌ها به صورت کامل (مطلق)

مطلق : یعنی وزن ندارد و در اصل وزن آن بی نهایت (α) است. راحت‌ترین کار این است که بجای x_1, x_2, x_3 در معادله‌های اصلی مقادیر واقعی آن‌ها جایگزین شود تا فقط Z_0 مجهول بماند و آن را به راحتی می‌توان بدست آورد.

نکته: در حالت نخست، دقت بدست آمده برای دستگاه، متأثر از دقت‌های مشاهده‌ها است، ولی در حالت دوم و سوم می‌توان خود طولیاب را نیز کالیبره کرد.

خطای Ground swing :

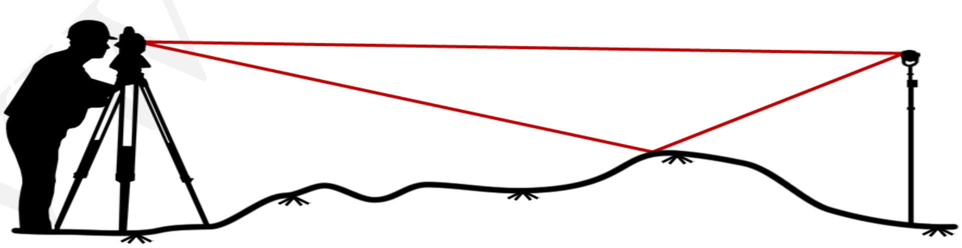
خطای اندازه گیری اختلاف فاز، در اثر انعکاس زمین گفته می‌شود که به پارامترهای، توپوگرافی زمین (ضریب انعکاس)، نسبت طول مستقیم با طول منعکس شده و زاویه ورودی امواج بستگی دارد.

برای کاهش آن دو راه داریم :

۱- تعیین زاویه ورودی موج با تغییر ارتفاع دستگاه

۲- استفاده از چند طول موج گوناگون (حالت fine طولیاب)

در توتال استیشن حالت fine تا سه رقم اعشار نشان داده می‌شود.



فصل چهارم

تحلیل شبکه‌های ژئودزی

منابع :

جزوه دکتر یونس نعیمی

جزوه مهندس عسکریان

سؤال‌های کنکور

کتاب Geodetic Network Analysis